ESERCITAZIONI FED

SETTIMA ESERCITAZIONE

23-04-2026

Problema 1 del 13-07-2022

Un condensatore a facce piane e parallele, di capacità C e con i piatti separati di una distanza d, è inizialmente carico con una carica $\pm Q_0$. Successivamente, i piatti del condensatore sono collegati tra loro, attraverso un resistore di resistenza R, in modo da scaricarli. Determinare:

a) l'energia per unità di tempo irradiata durante la scarica.

Supponendo poi che $C = 2.0\ \text{pF}$, $d = 0.20\ \text{mm}$ e $R = 2.0\ \text{k}\Omega$, determinare:

b) la frazione dell'energia totale presente inizialmente persa per radiazione;

c) la resistenza di radiazione.

Problema 2 del 22-06-2021

Nel modello classico dell'atomo di idrogeno l'unico elettrone si muove intorno al protone percorrendo un'orbita circolare di raggio $\mathbf{a_0} = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m (raggio di Bohr).

a) Determinare, in funzione di $\mathbf{a_0}$, la frequenza angolare ω_0 della radiazione emessa dall'elettrone e la corrispondente potenza di radiazione. [Suggerimento: rappresentare l'elettrone ruotante come la sovrapposizione di due dipoli oscillanti in direzioni ortogonali.]

b) Usando il risultato ottenuto in a), mostrare che nel modello classico l'elettrone collasserebbe sul nucleo e calcolare il corrispondente tempo di decadimento. [Suggerimento: supporre che l'energia persa in un periodo di rotazione sia piccola rispetto all'energia totale e che, sempre in un periodo di rotazione, l'orbita rimanga di forma circolare.]

Problema 3 del 27-01-2022

Un granello di polvere cosmica, approssimabile ad una sferetta di raggio a_0 perfettamente assorbente, è soggetto, nel sistema solare, alla forza di attrazione gravitazionale del sole ed alla pressione dovuta alla radiazione solare. Sapendo che la potenza irradiata dal sole è $P = 3.96 \cdot 10^{26}$ W, la massa del sole è $M = 2.0 \cdot 10^{30}$ kg e che la densità del granello è $\rho = 2.7 \cdot 10^{3}$ kg/m^3, determinare il valore minimo di a_0 al di sotto del quale la particella sarebbe spinta fuori dal sistema solare.

Problema 2 del 24-09-2021

In un'antenna lineare, assimilabile ad un filo rettilineo di lunghezza L e sezione S, con $S \ll L$, un generatore mantiene una corrente $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$.

Nell'approssimazione $L \ll \lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione emessa, determinare:

a) la potenza media totale irradiata dall'antenna;

b) il momento di dipolo associabile all'antenna;

c) la resistenza di radiazione dell'antenna.

[Suggerimento: supporre che nel filo ci siano N portatori di carica per unità di volume che si muovono in fase fra loro con velocità di deriva $\overrightarrow{v}_d$]

Problema 3 del 17-02-2022

Secondo il modello di Bohr, l'elettrone dell'atomo di idrogeno si muove su un'orbita circolare di raggio $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m con una velocità di modulo costante $v = 2.19 \cdot 10^{6}$ m/s. Determinare:

a) la perdita di energia per irraggiamento.

Supponendo la perdita di energia per irraggiamento costante nel tempo, calcolare:

b) il tempo necessario perché l'elettrone perda metà della sua energia di legame $U = 13.6$ eV.

[1 eV $= 1.60 \cdot 10^{-19}$ J]

Problema 1 del 17-02-2022

Due cariche puntiformi identiche q ruotano concordemente, con la stessa velocità angolare ω, lungo una circonferenza di raggio R giacente nel piano cartesiano xy e con il centro nell'origine. I vettori posizione delle due cariche hanno costanti di fase $-\Delta\phi/2$ e $\Delta\phi/2$. Nell'approssimazione di dipolo ideale, considerando la zona di radiazione, determinare:

a) la polarizzazione della radiazione emessa lungo l'asse x,

b) la potenza totale emessa dalle cariche in moto e gli angoli iniziali tra i vettori posizione corrispondenti al massimo e al minimo di detta potenza.

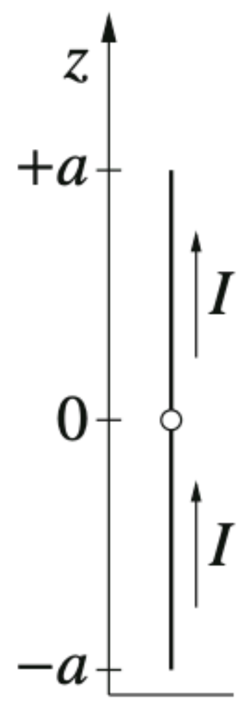
Si supponga ora che le cariche ruotino con velocità angolari ω e $-\omega$ e siano sovrapposte al tempo $t = 0$. Determinare:

c) la polarizzazione della radiazione emessa lungo l'asse x.

[Suggerimento: scrivere il momento di dipolo totale del sistema prima in coordinate polari e poi in coordinate cartesiane.]

Problema 2 del 05-09-2022

Un'antenna dipolare consiste di due elementi conduttivi identici, ciascuno di resistenza R e lunghezza a, disposti lungo l'asse z come in figura. Essi sono alimentati dal centro dell'antenna e sono percorsi da correnti I che hanno lo stesso verso e intensità data da



$$I = I(z, t) = I_0(1 - |z|/a)\cos(\omega t),$$

dove $a \ll 2\pi c/\omega$.

Determinare:

a) la potenza media P_{diss} dissipata su un ciclo per effetto Joule;

b) la densità lineare di carica dell'antenna e il suo momento di dipolo totale;

c) il rapporto P_{rad}/P_{diss} tra la potenza media emessa per radiazione su un ciclo e la potenza media calcolata in a).

[Suggerimenti: immaginare ciascuna delle due metà dell'antenna come una serie di infiniti resistori di resistenza $dR = (R/a)dz$; sfruttare l'equazione di continuità per la carica elettrica.]

ESERCITAZIONE 7.

PROBLEMA 1. DEL 12/07/2022

UN CONDENSATORE A FACCE PIANE E PARALLELE DI CAPACITÀ C, CON DISTANZA TRA LE ARMATURE DI d, É INIZIALMENTE CARICO CON CARICHE $\pm Q_0$
SUCCESSIVAMENTE VIENE SCARICATO COLLEGANDO LE DUE ARMATURE TRAMITE UNA RESISTENZA R

a) DETERMINARE LA POTENZA IRRADIATA DURANTE LA SCARICA

LA CARICA SEGUE UN ANDAMENTO DEL TIPO ESPONENZIALE DECRESCENTE
$Q(t) = Q_0 \exp(-t/\tau)$ CON $\tau = RC$

IL MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO VALE $p(t) = Q(t)d$
$$= Q_0 d \exp(-t/\tau)$$

PER LA RADIAZIONE DI DIPOLO SERVE LA DERIVATA SECONDA
$$\dot{p}(t) = -\frac{Q_0 d}{\tau} \exp(-t/\tau)$$
$$\ddot{p}(t) = \frac{Q_0 d}{\tau^2} \exp(-t/\tau)$$

LA POTENZA TOTALE IRRADIATA DA UN DIPOLO ELETTRICO É $P_{rad}(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2(t)$
$$= \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \ddot{p}^2(t)$$

DA CUI
$$P_{rad}(t) = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \left(\frac{Q_0 d}{\tau^2}\right)^2 \exp(-2t/\tau)$$
$$= \frac{Q_0^2 d^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{1}{R^4 C^4} \exp(-2t/\tau)$$

QUINDI LA POTENZA IRRADIATA DECRESCE COME $\exp(-2t/RC)$, CIOÉ PIÚ RAPIDAMENTE DELLA CARICA STESSA

b) DETERMINARE LA FRAZIONE DI ENERGIA PERSA PER RADIAZIONE

L'ENERGIA TOTALE IRRADIATA SI OTTIENE INTEGRANDO SUL TEMPO
$$E_{rad} = \int_0^\infty P_{rad}(t)\, dt$$
$$= \frac{Q_0^2 d^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 \tau^4} \underbrace{\int_0^\infty \exp(-2t/\tau)\, dt}_{= \left[-\frac{\tau}{2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\right]\Big|_0^\infty = \frac{\tau}{2}}$$
$$= \frac{Q_0^2 d^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3 \tau^3}$$

ALL'INIZIO DELLA SCARICA IL CONDENSATORE HA ENERGIA ELETTROSTATICA
$$U_0 = \frac{Q_0^2}{2C}$$

LA FRAZIONE DI ENERGIA INIZIALE PERSA PER RADIAZIONE É QUINDI
$$\frac{E_{rad}}{U_0} = \frac{Q_0^2 d^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3 R^3 C^3} \frac{2C}{Q_0^2} = \frac{d^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 R^3 C^2}$$
$$= 2.8 \cdot 10^{-10}$$

$\Rightarrow$ LA FRAZIONE IRRADIATA É MOLTO PICCOLA
$\downarrow$
L'ENERGIA INIZIALE DEL CONDENSATORE VIENE PER LO PIÚ DISSIPATA NEL RESISTORE COME CALORE

c) DETERMINARE LA RESISTENZA DI RADIAZIONE

LA POTENZA IRRADIATA PUÓ ESSERE SCRITTA NELLA FORMA
$P_{rad} = R_{rad} I^2$ CON $I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} \exp(-t/\tau)$

DA CUI $R_{rad} = \frac{P_{rad}}{I^2} = \frac{Q_0^2 d^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 R^4 C^4} \exp(-2t/RC) \frac{\tau^2}{Q_0^2} \frac{1}{\exp(-2t/RC)}$

$$= \frac{d^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 R^2 C^2}$$

$$= 5.6 \cdot 10^{-7}\ \Omega$$

SI TROVA QUINDI $R_{rad} \ll R$ $\Rightarrow$ IL CONDENSATORE SCARICANDOSI IRRADIA, MA IN MODO QUASI IMPERCETTIBILE RISPETTO ALL'ENERGIA TRASFORMATA IN CALORE NEL RESISTORE

PROBLEMA 2. DEL 22/06/2021

NEL MODELLO CLASSICO DELL'ATOMO DI IDROGENO, L'UNICO ELETTRONE SI MUOVE ATTORNO AL PROTONE SU UN'ORBITA CIRCOLARE DI RAGGIO $a_0 = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m

a) DETERMINARE LA FREQUENZA ANGOLARE ω_0 DELLA RADIAZIONE EMESSA DALL'ELETTRONE E LA CORRISPONDENTE POTENZA DI RADIAZIONE IN FUNZIONE DI a_0

L'ELETTRONE DI MASSA m_e E CARICA $-e$ PERCORRE UN'ORBITA CIRCOLARE DI RAGGIO a_0
LA FORZA CENTRIPETA NECESSARIA É FORNITA DALL'ATTRAZIONE COULOMBIANA TRA ELETTRONE E PROTONE $\frac{m_e v^2}{a_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2}$

POICHÉ $v = \omega_0 a_0$, SI HA $\frac{m_e}{a_0} (\omega_0 a_0)^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2}$

DA CUI $\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e a_0^3}}$

ORA, PONIAMO IL PROTONE FERMO NELL'ORIGINE E L'ELETTRONE IN MOTO CIRCOLARE NEL PIANO xy $\rightarrow$ $\bar{r}(t) = a_0 \cos(\omega_0 t)\,\hat{x} + a_0 \sin(\omega_0 t)\,\hat{y}$

IL MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO DEL SISTEMA VALE
$\bar{p}(t) = q\bar{r}(t)$ $\quad q = -e$
$\overset{!}{=} -e\bar{r}(t)$
$\overset{!}{=} -e a_0 [\cos(\omega_0 t)\,\hat{x} + \sin(\omega_0 t)\,\hat{y}]$

SI VEDE QUINDI CHE IL DIPOLO ROTANTE É LA SOVRAPPOSIZIONE DI DUE DIPOLI OSCILLANTI ORTOGONALI $p_x(t) = -e a_0 \cos(\omega_0 t)$
$p_y(t) = -e a_0 \sin(\omega_0 t)$

PER CIASCUNA COMPONENTE, $\ddot{p}_x(t) = e a_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$
$\ddot{p}_y(t) = e a_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$

DA CUI $\ddot{p} = e^2 a_0^2 \omega_0^4 \left[\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right]$
$\stackrel{1}{=} e^2 a_0^2 \omega_0^4$

LA POTENZA TOTALE IRRADIATA É QUINDI $P_{rad} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\ddot{p}^2$

$$= \frac{\mu_0}{6\pi c} e^2 a_0^2 \omega_0^4$$

$$= \frac{\mu_0 e^2 a_0^2}{6\pi c}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e a_0^3}\right)^2$$

$$\stackrel{\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}}{=} \frac{e^6}{96\pi^3 \varepsilon_0^3 m_e^2 c^3 a_0^4}$$

b) MOSTRARE CHE NEL MODELLO CLASSICO L'ELETTRONE COLLASSEREBBE SUL NUCLEO E CALCOLARE IL TEMPO DI DECADIMENTO

L'ENERGIA TOTALE DELL'ELETTRONE É $E = K + U$

L'ENERGIA CINETICA É $K = \frac{1}{2} m_e v^2$

DAL BILANCIO CENTRIPETO-COULOMBIANO $\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

DA CUI $m_e v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

E $K = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

L'ENERGIA POTENZIALE COULOMBIANA É $U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

DA CUI $E = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

LA POTENZA IRRADIATA É $P(r) = \frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_0^3 m_e^2 c^3 r^4}$

L'ELETTRONE PERDE ENERGIA PER RADIAZIONE, QUINDI $\frac{dE}{dt} = -P(r)$

ORA, $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt}$

IL RAGGIO DIMINUISCE NEL TEMPO

DA CUI $\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_0^3 m_e^2 c^3 r^4} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 m_e^2 c^3}\frac{1}{r^2}$

$dt = -\frac{12\pi^2\varepsilon_0^2 m_e^2 c^3}{e^4} r^2 dr$

IL TEMPO DI COLLASSO SI OTTIENE INTEGRANDO DA $r = a_0$ A $r = 0$

$$t = -\frac{12\pi^2\varepsilon_0^2 m_e^2 c^3}{e^4}\int_{a_0}^{0} r^2 dr$$

$$= -\frac{12\pi^2\varepsilon_0^2 m_e^2 c^3}{e^4}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{a_0}^{0} = \frac{4\pi^2\varepsilon_0^2 m_e^2 c^3}{e^4} a_0^3 \sim 10^{-11}\,s$$

$\downarrow$

L'ELETTRONE DOVREBBE COLLASSARE SUL NUCLEO IN UN TEMPO $\sim 10^{-11}s$, MA GLI ATOMI DI IDROGENO SONO STABILI, QUINDI IL MODELLO CLASSICO NON PUÓ DESCRIVERE LA STRUTTURA ATOMICA

PROBLEMA 3. DEL 27/01/2022

UN GRANELLO DI POLVERE COSMICA, APPROSSIMABILE A UNA SFERETTA DI RAGGIO a_0 PERFETTAMENTE ASSORBENTE É SOGGETTO A DUE FORZE:

- FORZA DI ~~[illegible]~~ ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE DEL SOLE
- FORZA DOVUTA ALLA PRESSIONE DELLA RADIAZIONE SOLARE

ORA, LA PARTICELLA SARÁ ESPULSA SE LA FORZA DOVUTA ALLA RADIAZIONE SUPERA QUELLA GRAVITAZIONALE → IL VALORE LIMITE DEL RAGGIO SI OTTIENE IMPONENDO L'UGUAGLIANZA TRA LE DUE FORZE $F_{rad} = F_g$

→ SE IL GRANELLO É PIÚ PICCOLO DI QUESTO VALORE CRITICO, LA PRESSIONE DI RADIAZIONE PREVALE

CONSIDERIAMO IL SOLE COME SORGENTE ISOTROPA DI POTENZA TOTALE P
A DISTANZA r DAL SOLE, IL FLUSSO DI ENERGIA VALE $I(r) = \dfrac{P}{4\pi r^2}$

PER UNA SUPERFICIE PERFETTAMENTE ASSORBENTE, LA PRESSIONE DI RADIAZIONE É $P_{rad} = \dfrac{I}{c}$

DA CUI $P_{rad}(r) = \dfrac{P}{4\pi c r^2}$

IL GRANELLO É UNA SFERA DI RAGGIO a_0, MA LA RADIAZIONE INTERCETTA SOLO LA SUA SEZIONE GEOMETRICA PERPENDICOLARE AI RAGGI INCIDENTI, OVVERO $A = \pi a_0^2$

PERTANTO, LA FORZA ESERCITATA DALLA RADIAZIONE É $F_{rad} = P_{rad} A = \dfrac{P a_0^2}{4 c r^2}$

LA FORZA DI ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE VALE $F_g = G \dfrac{Mm}{r^2}$ CON m MASSA DEL GRANELLO

POICHÉ IL GRANELLO É UNA SFERA DI RAGGIO a_0 E DENSITÁ ρ, $m = \rho V = \rho \dfrac{4}{3}\pi a_0^3$

DA CUI $F_g = G \dfrac{M}{r^2} \rho \dfrac{4}{3} \pi a_0^3$

IMPONENDO $F_{rad} = F_g \Rightarrow G \dfrac{M}{r^2} \rho \dfrac{4}{3}\pi a_0^3 = \dfrac{P a_0^2}{4 c r^2}$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{3P}{16\pi c G M \rho} = a_{critico}$$

$$\sim 2.2 \cdot 10^{-7}\, m$$

QUINDI
- SE $a_0 > a_{critico}$ LA GRAVITÁ PREVALE
- SE $a_0 < a_{critico}$ LA PRESSIONE DI RADIAZIONE PREVALE E IL GRANELLO VIENE SPINTO VIA

PROBLEMA 2. DEL 24/09/2021

UN'ANTENNA LINEARE, ASSIMILABILE A UN FILO RETTILINEO DI LUNGHEZZA L E SEZIONE S, CON $S \ll L$, É PERCORSA DA UNA CORRENTE $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$

a) DETERMINARE LA POTENZA MEDIA TOTALE IRRADIATA DALL'ANTENNA

LA POTENZA TOTALE IRRADIATA SI RICAVA DALLA FORMULA DI LARMOR
$$P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

SUPPONIAMO CHE NEL FILO CI SIANO N PORTATORI DI CARICA PER UNITÁ DI VOLUME, CIASCUNO DI CARICA q, CHE SI MUOVONO TUTTI A VELOCITÁ $\bar{v}_d$

LA DENSITÁ DI CORRENTE VALE $\bar{J} = Nq\bar{v}_d$
LA CORRENTE TOTALE É $i(t) = J(t) S \overset{!}{=} NqS v_d(t)$

DA CUI $v_d(t) = \dfrac{i(t)}{NqS} = \dfrac{I_0}{NqS} \sin(\omega t)$

NEL FILO C'É UN NUMERO TOTALE DI PORTATORI $N_{tot} = NLS$
LA CARICA TOTALE COINVOLTA NELLO SPOSTAMENTO É $Q_{tot} = NqLS$

QUINDI $v_d(t) = \dfrac{I_0 L}{Q_{tot}} \sin(\omega t)$
$$a(t) = \frac{I_0 L \omega}{Q_{tot}} \cos(\omega t)$$

DA CUI $P_{rad} = \dfrac{\mu_0}{6\pi c} (I_0 L \omega \cos(\omega t))^2 = \dfrac{\mu_0 I_0^2 L^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)}{6\pi c}$

LA POTENZA MEDIA IRRADIATA É $\langle P \rangle = \dfrac{\mu_0 I_0^2 L^2 \omega^2}{12\pi c}$ $\quad \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$

b) DETERMINARE IL MOMENTO DI DIPOLO ASSOCIABILE ALL'ANTENNA

CONFRONTANDO CON LA POTENZA MEDIA TOTALE IRRADIATA DA UN DIPOLO $\langle P_{rad} \rangle = \dfrac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$, SI TROVA $\dfrac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} = \dfrac{\mu_0 I_0^2 L^2 \omega^2}{12\pi c}$

$$\Rightarrow p_0^2 = \frac{I_0^2 L^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow p_0 = \frac{I_0 L}{\omega}$$

ALL'ANTENNA SI PUÓ ASSOCIARE UN MOMENTO DI DIPOLO OSCILLANTE
$p(t) = p_0 \cos(\omega t) = \dfrac{I_0 L}{\omega} \cos(\omega t)$

c) DETERMINARE LA RESISTENZA DI RADIAZIONE DELL'ANTENNA

LA RESISTENZA DI RADIAZIONE R_{rad} É DEFINITA COME QUELLA RESISTENZA EQUIVALENTE TALE CHE LA POTENZA MEDIA IRRADIATA SIA
$$\langle P \rangle = R_{rad} \langle i^2(t) \rangle \overset{!}{=} R_{rad} \frac{I_0^2}{2} \quad \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\frac{I_0^2 L^2 \omega^2 \mu_0}{12\pi c} = R_{rad} \frac{I_0^2}{2} \Rightarrow R_{rad} = \frac{\mu_0 L^2 \omega^2}{6\pi c}$$

ORA, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$

DA CUI $R_{rad} = \frac{\mu_0 L^2}{6\pi c}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{3}\pi c \mu_0 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$

PROBLEMA 3. DEL 17/02/2022

L'ELETTRONE DELL'ATOMO DI IDROGENO SI MUOVE SU UN'ORBITA CIRCOLARE DI RAGGIO $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m CON VELOCITÁ $V = 2.19 \cdot 10^6$ m/s

a) DETERMINARE LA PERDITA DI ENERGIA PER IRRAGGIAMENTO

POICHÉ L'ELETTRONE SI MUOVE SU UN'ORBITA CIRCOLARE UNIFORME, ESSO HA UN'ACCELERAZIONE CENTRIPETA $a = \frac{v^2}{r} = 9.1 \cdot 10^{22}$ m/s^2

UNA CARICA NON RELATIVISTICA ACCELERATA IRRADIA CON POTENZA DATA DALLA FORMULA DI LARMOR $P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$

PER GLI ELETTRONI, $q = e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C
$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m

DA CUI, SOSTITUENDO I VARI VALORI, $P \simeq 4.7 \cdot 10^{-8}$ W

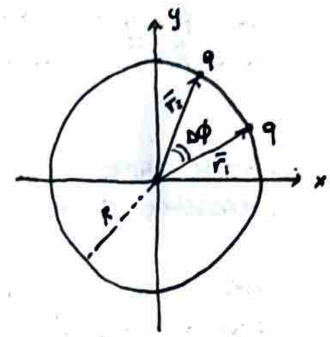
b) DETERMINARE IL TEMPO NECESSARIO PERCHÉ L'ELETTRONE PERDA METÁ DELLA SUA ENERGIA DI LEGAME $U = 13.6$ eV

L'ENERGIA DI LEGAME TOTALE É $U = 13.6$ eV $1\text{ eV} = 1.60 \cdot 10^{-19}$ J
METÁ DELL'ENERGIA É QUINDI $\Delta E = 6.8\text{ eV} = 1.09 \cdot 10^{-18}$ J

SE ASSUMIAMO CHE LA POTENZA IRRADIATA RESTI COSTANTE NEL TEMPO, ALLORA $P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta E}{P} = \frac{1.09 \cdot 10^{-18}}{4.7 \cdot 10^{-8}} \simeq 2.3 \cdot 10^{-11}$ s

PROBLEMA 1. DEL 17/02/2022

DUE CARICHE PUNTIFORMI IDENTICHE q RUOTANO SU UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R NEL PIANO xy



a) DETERMINARE LA POLARIZZAZIONE DELLA RADIAZIONE EMESSA LUNGO x

LE DUE CARICHE RUOTANO ENTRAMBE CON VELOCITÁ ANGOLARE ω E RUOTANO CONCORDEMENTE

IN COORDINATE CARTESIANE I VETTORI POSIZIONE SONO

$$\bar{r}_1 = R\left[\cos\left(\omega t - \frac{\Delta\phi}{2}\right), \sin\left(\omega t - \frac{\Delta\phi}{2}\right)\right]$$

$$\bar{r}_2 = R\left[\cos\left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2}\right), \sin\left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2}\right)\right]$$

IL MOMENTO DI DIPOLO TOTALE DEL SISTEMA É

$$\bar{p} = q(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)$$
$$= qR\left\{\left[\cos\left(\omega t - \frac{\Delta\phi}{2}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2}\right)\right]\hat{x} + \left[\sin\left(\omega t - \frac{\Delta\phi}{2}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2}\right)\right]\hat{y}\right\}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

SE $A = \omega t - \frac{\Delta\phi}{2}$ E $B = \omega t + \frac{\Delta\phi}{2}$, ALLORA $\frac{A+B}{2} = \omega t$

$\frac{A-B}{2} = -\frac{\Delta\phi}{2}$

DA CUI

$$\bar{p} = qR\left\{\left[2\cos(\omega t)\cos\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)\right]\hat{x} + \left[2\sin(\omega t)\cos\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)\right]\hat{y}\right\}$$
$$= 2qR\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\left[\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y}\right]$$

$\cos(x) = \cos(-x)$

IL DIPOLO TOTALE RUOTA UNIFORMEMENTE NEL PIANO xy CON FREQUENZA ω
IL SUO MODULO É COSTANTE E PARI A $p_0 = 2qR\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

QUINDI IL SISTEMA SI COMPORTA COME UN SINGOLO DIPOLO ROTANTE NEL PIANO DI AMPIEZZA CHE DIPENDE DALLO SFASAMENTO $\Delta\phi$

PER TROVARE LA POLARIZZAZIONE DELLA RADIAZIONE EMESSA NELLA DIREZIONE $\hat{x}$ DERIVIAMO IL CAMPO $\bar{E}$ GENERATO DA UNA SORGENTE ARBITRARIA NELLA ZONA DI RADIAZIONE $r \gg |\bar{r}_1 + \bar{r}_2|$

$$\bar{E}_{rad} \overset{\mu_0/4\pi r}{\propto} \hat{n} \times (\hat{n} \times \ddot{\bar{p}})$$

$\hat{n}$ DIREZIONE DI OSSERVAZIONE

$$\dot{\bar{p}} = 2qR\omega\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\left[-\sin(\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y}\right]$$

$$\ddot{\bar{p}} = -2qR\omega^2\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\left[\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y}\right] = -\omega^2\bar{p}$$

OSSERVARE LUNGO L'ASSE x SIGNIFICA PRENDERE $\hat{n} = \hat{x}$

$\hat{x} \times \ddot{\bar{p}} \; // \; \hat{z}$ PERCHÉ $\bar{p}$ GIACE NEL PIANO xy
$\hat{x} \times (\hat{x} \times \ddot{\bar{p}}) = \hat{x} \times \hat{z} \; // \; \hat{y}$ → LA RADIAZIONE EMESSA LUNGO $\hat{x}$ É LINEARMENTE POLARIZZATA LUNGO $\hat{y}$

b) DETERMINARE LA POTENZA TOTALE EMESSA E GLI ANGOLI INIZIALI CORRISPONDENTI AL MASSIMO E AL MINIMO DI TALE POTENZA

NELL' APPROSSIMAZIONE DI DIPOLO LA POTENZA TOTALE EMESSA É

$$P_{rad} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\bar{p}}^2 = \frac{\mu_0}{6\pi c} 4q^2R^2w^4 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

IL MASSIMO SI HA QUANDO $\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 1$

OVVERO PER $\frac{\Delta\phi}{2} = K\pi \Rightarrow \Delta\phi = 2K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$

$$P_{rad}^{max} = \frac{2}{3} \frac{\mu_0 q^2 R^2 w^4}{\pi c}$$

SE $\Delta\phi = 0$, LE DUE CARICHE SONO SOVRAPPOSTE ⇒ IL MOMENTO DI DIPOLO É MASSIMO E PURE LA POTENZA IRRADIATA

IL MINIMO SI HA QUANDO $\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 0$

OVVERO PER $\frac{\Delta\phi}{2} = \frac{\pi}{2} + K\pi = \pi\left(\frac{1}{2} + K\right) \Rightarrow \Delta\phi = \pi(2K+1)$, $K \in \mathbb{Z}$

$$P_{rad}^{min} = 0$$

c) DETERMINARE LA POLARIZZAZIONE DELLA RADIAZIONE EMESSA LUNGO L'ASSE x

SUPPONIAMO CHE LE CARICHE RUOTINO CON VELOCITÁ ANGOLARI w E -w E SIANO SOVRAPPOSTE IN t=0 , POSSIAMO QUINDI SCEGLIERE ENTRAMBE LE CARICHE INIZIALMENTE LUNGO x

→ $\bar{r}_1 = R[\cos(wt)\hat{x} + \sin(wt)\hat{y}]$
$\bar{r}_2 = R[\cos(wt)\hat{x} - \sin(wt)\hat{y}]$

IL MOMENTO DI DIPOLO TOTALE É $\bar{p} = qR\{[\cos(wt)+\cos(wt)]\hat{x} + [\sin(wt)-\sin(wt)]\hat{y}\} = 2qR\cos(wt)\hat{x}$

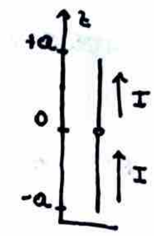
$\dot{\bar{p}} = -2qRw\sin(wt)\hat{x}$
$\ddot{\bar{p}} = -2qRw^2\cos(wt)\hat{x} = -w^2\bar{p}$

ANCHE IN QUESTO CASO, $\bar{E}_{rad} \propto \hat{n} \times (\hat{n} \times \ddot{\bar{p}})$

CON $\hat{n} = \hat{x}$, ALLORA $\hat{n} \times (\hat{n} \times \ddot{\bar{p}}) = 0$ ⇒ LUNGO L'ASSE x NON SI OSSERVA ALCUNA RADIAZIONE

PROBLEMA 2. DEL 05/09/2022

UN'ANTENNA DIPOLARE É COSTITUITA DA DUE ELEMENTI CONDUTTIVI IDENTICI, CIASCUNO DI LUNGHEZZA a E RESISTENZA R, DISPOSTI LUNGO L'ASSE z



LA CORRENTE LUNGO I DUE BRACCI É $I(z,t) = I_0\left(1-\frac{|z|}{a}\right)\cos(wt) \qquad -a\le z\le a$

CON L'APPROSSIMAZIONE DI DIPOLO $a \ll \frac{2\pi c}{w}$

a) DETERMINARE LA POTENZA MEDIA DISSIPATA PER EFFETTO JOULE

OGNI BRACCIO HA LUNGHEZZA a E RESISTENZA R
UN TRATTO INFINITESIMO dz DI CIASCUN BRACCIO HA RESISTENZA $\quad dR = \frac{R}{a}dz$

LA POTENZA ISTANTANEA DISSIPATA IN UN ELEMENTO RESISTIVO É

$dP = I^2(z,t)\,dR$

$\overset{!}{=} I_0^2\left(1-\frac{|z|}{a}\right)^2\cos^2(wt)\,dR \qquad$ PER UN SINGOLO BRACCIO

PER IL BRACCIO SUPERIORE $(0\le z\le a)$, SI HA $|z| = z$, QUINDI

$P_{sup} = I_0^2\cos^2(wt)\frac{R}{a}\underbrace{\int_0^a\left(1-\frac{z}{a}\right)^2dz}_{=a/3}$

$\overset{!}{=} \frac{I_0^2 R}{3}\cos^2(wt)$

I DUE BRACCI DANNO LO STESSO CONTRIBUTO, QUINDI $P = 2P_{sup} = \frac{2}{3}I_0^2R\cos^2(wt)$

LA POTENZA MEDIA DISSIPATA É $\langle P\rangle = \frac{1}{3}I_0^2R \qquad \langle\cos^2(wt)\rangle = \frac{1}{2}$

b) DETERMINARE LA DENSITÁ LINEARE DI CARICA E IL MOMENTO DI DIPOLO TOTALE

PER TROVARE LA DENSITÁ LINEARE SI USA L'EQUAZIONE DI CONTINUITÁ

$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z}$

LA CORRENTE É $I(z,t) = I_0\left(1-\frac{|z|}{a}\right)\cos(wt)$

BISOGNA DERIVARE SEPARATAMENTE NEI DUE INTERVALLI

PER $0<z<+a$, $|z| = z$

QUINDI $I(z,t) = I_0\left(1-\frac{z}{a}\right)\cos(wt) \qquad$ DA CUI $\frac{\partial I}{\partial z} = -I_0\frac{1}{a}\cos(wt)$

PER $-a<z<0$, $|z| = -z$

QUINDI $I(z,t) = I_0\left(1+\frac{z}{a}\right)\cos(wt) \qquad$ DA CUI $\frac{\partial I}{\partial z} = I_0\frac{1}{a}\cos(wt)$

QUINDI PER $t>0$: $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{I_0}{a} \cos(\omega t)$

INTEGRANDO, $\lambda(z,t) = \frac{I_0}{a\omega} \sin(\omega t) + C$

PER $z<0$; $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{I_0}{a} \cos(\omega t)$

INTEGRANDO, $\lambda(z,t) = -\frac{I_0}{a\omega} \sin(\omega t) + C$

LE COSTANTI DI INTEGRAZIONE RAPPRESENTANO EVENTUALI CONTRIBUTI STATICI, MA NEL PROBLEMA CI INTERESSA IL REGIME OSCILLANTE PURO DELL'ANTENNA, QUINDI SI PRENDONO NULLE $C=0$

DA CUI
$$\lambda(z,t) = \begin{cases} \frac{I_0}{a\omega} \sin(\omega t) & 0<z<a \\ -\frac{I_0}{a\omega} \sin(\omega t) & -a<z<0 \end{cases}$$

POICHÉ L'ANTENNA É LUNGO L'ASSE z, IL MOMENTO DI DIPOLO É DIRETTO LUNGO $\hat{z}$ E VALE $p_z = \int_{-a}^{a} z\,\lambda(z,t)\,dz$

$$= \int_{-a}^{0} z\left(-\frac{I_0}{a\omega}\sin(\omega t)\right)dz + \int_{0}^{a} z\left(\frac{I_0}{a\omega}\sin(\omega t)\right)dz$$

$$= \frac{I_0}{a\omega}\sin(\omega t)\left[\underbrace{-\int_{-a}^{0} z\,dz}_{=a^2/2} + \underbrace{\int_{0}^{a} z\,dz}_{=a^2/2}\right]$$

$$= \frac{I_0 a}{\omega}\sin(\omega t)$$

VETTORIALMENTE, $\bar{p} = \frac{I_0 a}{\omega} \sin(\omega t)\,\hat{z}$

c) DETERMINARE IL RAPPORTO P_{rad}/P_{diss}

NELL'APPROSSIMAZIONE DI DIPOLO, $P_{rad} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\ddot{p}^2$

$\bar{p} = \frac{I_0 a}{\omega}\sin(\omega t)\,\hat{z}$

$\dot{\bar{p}} = I_0 a \cos(\omega t)\,\hat{z}$

$\ddot{\bar{p}} = -I_0 a\omega \sin(\omega t)\,\hat{z} = -\omega \bar{p}$

DA CUI $P_{rad} = \frac{\mu_0}{6\pi c} I_0^2 a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$

$\langle P_{rad}\rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 a^2 \omega^2}{12\pi c}$

DAL PUNTO a) $\langle P_{diss}\rangle = \frac{1}{3} R I_0^2$

$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2}$

QUINDI $\frac{\langle P_{rad}\rangle}{\langle P_{diss}\rangle} = \frac{\mu_0 I_0^2 a^2\omega^2}{12\pi c}\cdot\frac{3}{R I_0^2} = \frac{\mu_0 a^2\omega^2}{4\pi c R} = \frac{\mu_0 a^2}{R}\frac{4\pi^2c^2}{\lambda^2}\frac{1}{4\pi c}$

$= \frac{\mu_0 a^2 \pi c}{R\lambda^2} = \frac{\mu_0 \pi c}{R}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$