ESERCITAZIONI FED

TERZA ESERCITAZIONE

26-03-2026

Problema 4 del 14-07-2021

Si consideri la funzione $\Psi(y,t) = A e^{-a(by-dt)^2}$ con A, a, b, e d costanti reali.

a) Mostrare esplicitamente che Ψ rappresenta una funzione d'onda.

b) Calcolare la velocità dell'onda e la sua direzione di propagazione.

Problema 2 del 14-07-2021

In una regione di spazio priva di correnti elettriche è presente un campo elettromagnetico caratterizzato da un potenziale vettore $\overrightarrow{\mathbf{A}} = A_0 \sin(kz - \omega t)\hat{\mathbf{x}}$, con A_0 e ω costanti note, e da un campo elettrico $\overrightarrow{\mathbf{E}} = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\mathbf{x}}$.

Calcolare:

a) il campo magnetico $\overrightarrow{\mathbf{B}}$;

b) i valori di E_0 e k;

c) la differenza di potenziale scalare tra il punto $(x,0,0)$ e l'origine delle coordinate.

Problema 2 del 27-01-2022

La rifrazione elle onde radio dalla ionosfera può essere considerata, in maniera semplificata, come la riflessione interna totale all'interfaccia tra due mezzi, di cui il primo ha indice di rifrazione $n_1 \approx 1$ e il secondo, la ionosfera, ha indice di rifrazione n_2. Sapendo che nella ionosfera il numero di elettroni per unità di volume è N, determinare:

a) il modulo P del vettore polarizzazione nella ionosfera [*];

b) l'indice di rifrazione n_2 della ionosfera in funzione della frequenza angolare ω dell'onda [*].

Supponendo che l'onda radio incida sull'interfaccia con la ionosfera ad un angolo $\phi = 45°$, determinare:

c) la minima lunghezza d'onda λ_{min} di un'onda radio che venga riflessa indietro verso la superficie terrestre.

[*] Suggerimento: detta $E = E_0 \cos \omega t$ l'ampiezza del campo elettrico dell'onda radio, si consideri la forza esercitata dal campo su un elettrone libero ed il conseguente spostamento x di quest'ultimo che genererà la polarizzazione cercata.

Problema 9.13 del Griffiths

Problem 9.13. Find all elements of the Maxwell stress tensor for a monochromatic plane wave traveling in the z direction and linearly polarized in the x direction (Eq. 9.49). Does your answer make sense? (Remember that $-\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ represents the momentum flux density.) How is the momentum flux density related to the energy density, in this case?

ESERCITAZIONE 3. 26/03/2026

PROBLEMA 4. DEL 14/07/2021

$\Psi(y,t) = A \exp[-a(by-dt)^2]$ CON A, a, b, d COSTANTI REALI

a) MOSTRARE CHE $\Psi(y,t)$ É UNA FUNZIONE D'ONDA

PER STABILIRE SE UNA FUNZIONE RAPPRESENTA UN'ONDA CHE SI PROPAGA LUNGO UNA DIREZIONE SPAZIALE, BISOGNA VERIFICARE SE PUÓ ESSERE SCRITTA NELLA FORMA $\Psi(y,t) = f(y \pm vt)$

↳ · $f(y-vt)$ RAPPRESENTA UN'ONDA CHE SI PROPAGA NEL VERSO POSITIVO DELL'ASSE y CON VELOCITÁ v
· $f(y+vt)$ INVECE UN'ONDA CHE SI PROPAGA NEL VERSO NEGATIVO DELL'ASSE y CON VELOCITÁ v

⇒ DOBBIAMO SCRIVERE L'ARGOMENTO DELL'ESPONENZIALE NELLA FORMA $y \pm vt$

↳ $(by-dt) = b\left(y - \frac{d}{b}t\right) \overset{!}{=} b(y-vt)$ SE $v = d/b$

⇒ $\Psi(y,t) = A \exp[-ab^2(y-vt)]$ CON $v = d/b$

POSSIAMO QUINDI DIRE CHE $\Psi(y,t)$ RAPPRESENTA UNA FUNZIONE D'ONDA

b) CALCOLARE LA VELOCITÁ E LA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE DELL'ONDA

$v = \frac{d}{b}$ E SICCOME $\Psi(y,t) = f(y-vt)$ ALLORA SI PROPAGA NEL VERSO DELLE y POSITIVE

NOTA IL PROBLEMA SI POTEVA ANCHE RISOLVERE USANDO L'EQUAZIONE DELLE ONDE UNIDIMENSIONALE $\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$

PROBLEMA 2. DEL 14/07/2021

REGIONE DI SPAZIO PRIVA DI CORRENTI ELETTRICHE IN CUI É PRESENTE UN CAMPO ELETTROMAGNETICO CARATTERIZZATO DA UN POTENZIALE VETTORE $\bar{A} = A_0 \sin(kz-\omega t)\hat{x}$, CON A_0 E ω COSTANTI NOTE E DA UN CAMPO ELETTRICO $\bar{E} = E_0 \cos(kz-\omega t)\hat{x}$

a) CALCOLARE IL CAMPO MAGNETICO $\bar{B}$

IL CAMPO MAGNETICO SI OTTIENE DAL ROTORE DEL POTENZIALE VETTORE $\bar{\nabla} \times \bar{A} = \bar{B}$

↳ NEL NOSTRO CASO $\bar{A}$ HA SOLO UNA COMPONENTE LUNGO x
$\bar{A} = (A_0 \sin(kz-\omega t), 0, 0) \overset{!}{=} (A_x, A_y, A_z)$

IL ROTORE IN COORDINATE CARTESIANE É

$$\bar{\nabla}\times\bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

SOLO $A_x \neq 0$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left[A_0 \sin(kz-\omega t)\right]\hat{y} = A_0 k \cos(kz-\omega t)\hat{y}$$

DA CUI $\bar{B} = A_0 k \cos(kz-\omega t)\hat{y}$ ONDA PIANA CHE SI PROPAGA LUNGO z

b) CALCOLARE I VALORI DI E_0 E k

PARTIAMO DA $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

SOLO $E_x \neq 0$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left[E_0 \cos(kz-\omega t)\right]\hat{y} = -E_0 k \sin(kz-\omega t)\hat{y}$$

EGUAGLIANDO, $-E_0 k \sin(kz-\omega t)\hat{y} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[A_0 k \cos(kz-\omega t)\right]\hat{y}$

$$= -A_0 k \omega \sin(kz-\omega t)\hat{y}$$

DA CUI $E_0 = \omega A_0$

USIAMO ORA $\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

$$= \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

SOLO $B_y \neq 0$

$$= -\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\left[A_0 k \cos(kz-\omega t)\right]\hat{x} = A_0 k^2 \sin(kz-\omega t)\hat{x}$$

EGUAGLIANDO, $A_0 k^2 \sin(kz-\omega t)\hat{x} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[E_0 \cos(kz-\omega t)\right]\hat{x}$

$$= \mu_0\varepsilon_0 E_0 \omega \sin(kz-\omega t)\hat{x}$$

DA CUI $A_0 k^2 = \mu_0\varepsilon_0 E_0 \omega$

$$= \mu_0\varepsilon_0 A_0 \omega^2 \Rightarrow k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k = \pm\frac{\omega}{c}$$

c) CALCOLARE LA DIFFERENZA DI POTENZIALE SCALARE TRA IL PUNTO $(x,0,0)$ E $(0,0,0)$

RICORDIAMO CHE $\bar{E} = -\bar{\nabla}\phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \Rightarrow \bar{\nabla}\phi = -\left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)$

CON $\bar{E} = E_0 \cos(kz - wt)\hat{x} \overset{!}{=} A_0 w \cos(kz-wt)\hat{x}$ E $\partial_t \bar{A} = \partial_t [A_0 \sin(kz-wt)]\hat{x} \overset{!}{=} -A_0 w \cos(kz-wt)\hat{x}$

DA CUI $\Delta\phi = -\int_{x_0}^{x_1} (\bar{E} + \partial_t \bar{A}) \cdot d\bar{x}$ $\qquad x_0 = (0,0,0)$; $x_1 = (x,0,0)$

$\overset{!}{=} -A_0 w \int_{x_0}^{x_1} [\cos(-wt) - \cos(-wt)]\, dx = 0 \Rightarrow \Delta\phi = 0$

PROBLEMA 2. DEL 27/01/2022

RIFRAZIONE DELLE ONDE RADIO NELLA IONOSFERA, CONSIDERATA COME LA RIFLESSIONE INTERNA TOTALE ALL'INTERFACCIA TRA DUE MEZZI

↳ IDEA: LA IONOSFERA PUÓ ESSERE DESCRITTA COME UN PLASMA CONTENENTE ELETTRONI LIBERI CON DENSITÁ NUMERICA N
→ QUANDO UN'ONDA ELETTROMAGNETICA ATTRAVERSA IL MEZZO, IL SUO CAMPO ELETTRICO METTE IN OSCILLAZIONE GLI ELETTRONI

↓

IL MOTO COLLETTIVO DEGLI ELETTRONI COSTITUISCE UNA RISPOSTA DEL MEZZO AL CAMPO ESTERNO
→ QUESTA RISPOSTA VIENE DESCRITTA TRAMITE IL VETTORE POLARIZZAZIONE $\bar{P}$
↳ LA POLARIZZAZIONE MODIFICA LA VELOCITÁ DI PROPAGAZIONE DELL'ONDA NEL MEZZO

a) CALCOLARE IL MODULO P DEL VETTORE POLARIZZAZIONE

CONSIDERIAMO UN SINGOLO ELETTRONE LIBERO NELLA IONOSFERA E CHIAMIAMO q LA SUA CARICA ELETTRICA

SIA $E(t) = E_0 \cos(wt)$ IL CAMPO ELETTRICO DELL'ONDA
E $F(t) = qE_0 \cos(wt)$ LA FORZA ESERCITATA DAL CAMPO SULL'ELETTRONE

APPLICANDO LA SECONDA LEGGE DI NEWTON, OTTENIAMO $m_e \ddot{x} = qE_0 \cos(wt)$

CERCHIAMO QUINDI UNA SOLUZIONE DEL TIPO $x(t) = x_0 \cos(wt)$
DERIVANDO DUE VOLTE SI HA $\ddot{x}(t) = -w^2 x_0 \cos(wt)$
E SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE, $-m_e w^2 x_0 \cos(wt) = q E_0 \cos(wt)$

DA CUI $x_0 = -\frac{qE_0}{m_e w^2}$

SE L'ELETTRONE VIENE SPOSTATO DI UNA QUANTITÁ x RISPETTO AL FONDO DEL PLASMA, SI GENERA UN DIPOLO ELETTRICO
→ IL MODULO DEL MOMENTO DI DIPOLO DEL SINGOLO ELETTRONE VALE
$p = |q|\, x(t) = -\frac{q^2 E_0}{m_e w^2} \cos(wt)$

SE CI SONO N ELETTRONI PER UNITÁ DI VOLUME, IL MODULO DELLA POLARIZZAZIONE VALE $P = Np$

$$\stackrel{!}{=} \frac{Nq^2}{m_e \omega^2} E_0 \cos(\omega t)$$

b) CALCOLARE L'INDICE DI RIFRAZIONE n_2 DELLA IONOSFERA

L'INDICE DI RIFRAZIONE, SUPPONENDO $\mu = \mu_0 \mu_r = 1$, É DATO DA $n_2 \approx \sqrt{\varepsilon_r}$ CON ε_r COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA

PER MEZZI LINEARI, OMOGENEI E ISOTROPI, $\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \stackrel{!}{=} \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E}$

E $\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$

$$\stackrel{!}{=} \varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t) - \frac{Nq^2}{m_e \omega^2} E_0 \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r E_0 \cos(\omega t) = \varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t) - \frac{Nq^2}{m_e \omega^2} E_0 \cos(\omega t)$$

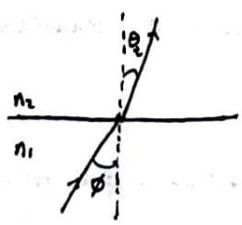
DA CUI $\varepsilon_r = 1 - \frac{Nq^2}{m_e \omega^2 \varepsilon_0}$

E $n_2 = \sqrt{1 - \frac{Nq^2}{m_e \omega^2 \varepsilon_0}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ CON $\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m_e}$ FREQUENZA DI PLASMA

OSS. LA FREQUENZA DI PLASMA É LA FREQUENZA CARATTERISTICA DELLE OSCILLAZIONI COLLETTIVE DEGLI ELETTRONI DEL PLASMA

- SE $\omega \gg \omega_p$ IL MEZZO SI COMPORTA QUASI COME IL VUOTO
- SE $\omega \sim \omega_p$ LA RISPOSTA ELETTRONICA DIVENTA IMPORTANTE
- SE $\omega < \omega_p$ L'INDICE DI RIFRAZIONE DIVENTA IMMAGINARIO E L'ONDA NON SI PROPAGA NEL MEZZO

c) λ_{min} DI UN'ONDA RADIO CHE VENGA RIFLESSA INDIETRO VERSO LA SUPERFICIE



AFFINCHÉ L'ONDA VENGA RIFLESSA VERSO TERRA, DEVE VERIFICARSI RIFLESSIONE INTERNA TOTALE

PER LA LEGGE DI SNELL, $n_1 \sin\phi = n_2 \sin\theta_t$ CON $n_1 = 1$ INDICE DI RIFRAZIONE DELL'ARIA

ORA, LA CONDIZIONE LIMITE DI RIFLESSIONE INTERNA TOTALE SI HA QUANDO $\theta_t = 90°$ $\Rightarrow \sin\theta_t = 1$ $\Rightarrow \sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = n_2$ θ_c ANGOLO CRITICO

QUINDI LA RIFLESSIONE INTERNA TOTALE SI HA PER TUTTI GLI ANGOLI $\theta \geq \theta_c$

PONENDO $\theta_c = \phi = 45°$, SI HA $\sin\phi \geq n_2$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \Rightarrow \omega^2 \leq 2\omega_p^2$$

POICHÉ $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ LA CONDIZIONE SULLA FREQUENZA MASSIMA SI TRADUCE IN UNA λ_{min} $\Rightarrow \omega_{max}^2 = 2\omega_p^2$

DA CUI $\lambda_{min} = \frac{2\pi c}{\omega_{max}} = \frac{2\pi c}{\sqrt{2}\,\omega_p} = \sqrt{2}\pi c \sqrt{\frac{\varepsilon_0 m_e}{Nq^2}}$

PROBLEMA 9.13 DEL GRIFFITHS

TROVARE GLI ELEMENTI DEL TENSORE DEGLI SFORZI DI MAXWELL PER UN'ONDA PIANA MONOCROMATICA CHE VIAGGIA LUNGO z ED É POLARIZZATA LUNGO x

IL TENSORE DEGLI SFORZI DI MAXWELL É LA GRANDEZZA CHE DESCRIVE COME IL CAMPO EM TRASPORTA E SCAMBIA QUANTITÁ DI MOTO CON LA MATERIA

NEL CASO DI UN'ONDA PIANA CHE VIAGGIA LUNGO z:

- IL CAMPO ELETTRICO É TRASVERSO ALLA PROPAGAZIONE E IN QUESTO CASO É LUNGO x $\quad \bar{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta)\,\hat{x}$

- ANCHE IL CAMPO MAGNETICO É TRASVERSO ED É LUNGO y
$$\bar{B}(z,t) = B_0 \cos(kz-\omega t+\delta)\,\hat{y} \overset{!}{=} \frac{E_0}{c} \cos(kz-\omega t+\delta)\,\hat{y}$$

- LA QUANTITÁ DI MOTO VIENE TRASPORTATA LUNGO z
→ CI ASPETTIAMO QUINDI DAL TENSORE CHE NON CI SIA NESSUN FLUSSO NETTO LUNGO x O y, MA SOLO LUNGO z

IL TENSORE DEGLI SFORZI DI MAXWELL É DEFINITO COME
$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} B^2 \right)$$

NEL NOSTRO CASO, L'UNICA COMPONENTE NON NULLA DEL CAMPO ELETTRICO É E_x, MENTRE QUELLA DEL CAMPO MAGNETICO É B_y
⇒ I TERMINI NON DIAGONALI $(i \neq j)$ SONO NULLI

VEDIAMO QUINDI I TERMINI DIAGONALI
$$T_{xx} = \varepsilon_0 \left(E_x E_x - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\underbrace{\cancel{B_x B_x}}_{0} - \frac{1}{2} B^2 \right)$$
$$\overset{!}{=} \varepsilon_0 \left(E^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) - \frac{1}{2\mu_0} B^2$$
$$\overset{!}{=} \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 = 0$$

$$T_{yy} = \varepsilon_0 \left(\underbrace{\cancel{E_y E_y}}_{0} - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_y B_y - \frac{1}{2} B^2 \right)$$
$$\overset{!}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = 0$$

$$T_{zz} = \varepsilon_0 \left(\underbrace{\cancel{E_z E_z}}_{0} - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\underbrace{\cancel{B_z B_z}}_{0} - \frac{1}{2} B^2 \right)$$
$$\overset{!}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2$$
$$\overset{!}{=} -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) = -u$$

u DENSITÁ DI ENERGIA ELETTROMAGNETICA

QUINDI $$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz-\omega t+\delta) \end{pmatrix}$$

<u>OSS.</u> $-\overleftrightarrow{T}$ RAPPRESENTA LA DENSITÁ DI FLUSSO DI QUANTITÁ DI MOTO

$\Rightarrow$ $-T_{zz} = u$ DICE CHE IL FLUSSO DI QUANTITÁ DI MOTO É PROPRIO LUNGO LA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE DELL'ONDA