ESERCITAZIONI FED

UNDICESIMA ESERCITAZIONE

21-05-2026

Problema 1 del 27/01/2022

Un condensatore a facce piane e parallele, entrambe di area A e separate di una distanza $d \ll \sqrt{A}$, è disposto con le piastre ortogonali all'asse $\hat{\mathbf{z}}$. Il condensatore è inizialmente carico, quindi un campo elettrico uniforme $\overrightarrow{\mathbf{E}} = E\hat{\mathbf{z}}$ è presente tra le piastre, ed è immerso in un campo magnetico uniforme $\overrightarrow{\mathbf{B}} = B\,\hat{\mathbf{x}}$. Determinare:

a) l'energia elettromagnetica immagazzinata nello spazio tra le piastre;

b) la quantità di moto elettromagnetica presente nello spazio tra le piastre.

Ad un certo istante $t = 0$ un filo giacente lungo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$ è collegato tra le piastre in modo da scaricare il condensatore. Considerando la forza magnetica agente sulla corrente I che attraversa il filo determinare:

c) l'impulso totale applicato al sistema durante la scarica.

Problema 1 del 26/01/2023

Due lastre metalliche piane, di forma quadrata con lato $L = 1.0$ m, sono poste parallelamente nel vuoto ad una distanza $d_0 = 1.0 \cdot 10^{-3}$ m. Sulle lastre sono presenti cariche di segno opposto e pari intensità $Q_0 = 100\ \mu$C, inoltre esse sono collegate ad una batteria in modo che la d.d.p. tra loro resti sempre costante. Ad un certo istante, le lastre iniziano ad allontanarsi in modo simmetrico con velocità costante $v = 0.010$ m/s, rimanendo parallele fra loro. Determinare, trascurando gli effetti ai bordi:

a) il modulo del campo magnetico B, in funzione del tempo, alla distanza $r = 0.10$ m dall'asse passante per il centro delle lastre;

b) modulo direzione e verso del vettore di Poynting in tutto lo spazio;

c) la potenza totale di radiazione raccolta su una sfera di raggio $R \gg L$.

Problema 1 del 05/09/2022

Un solenoide infinito, di raggio b e con n spire/m, è disposto lungo l'asse z di un sistema di coordinate cilindriche ed è percorso da una corrente I che circola secondo il verso della mano destra rispetto all'asse z. Un guscio cilindrico di raggio $a < b$ e spessore trascurabile, pure esso di lunghezza infinita, è posto lungo l'asse z coassialmente al solenoide ed è dotato di una densità di carica lineare positiva λ. Determinare:

a) la quantità di moto totale per unità di lunghezza associata alla configurazione dei campi elettrico e magnetico;

b) il momento della quantità di moto totale per unità di lunghezza associato alla configurazione dei campi elettrico e magnetico.

Si supponga ora di variare nel tempo l'intensità della corrente I. Determinare:

c) il momento per unità di lunghezza della forza totale agente sul guscio durante la variazione della corrente.

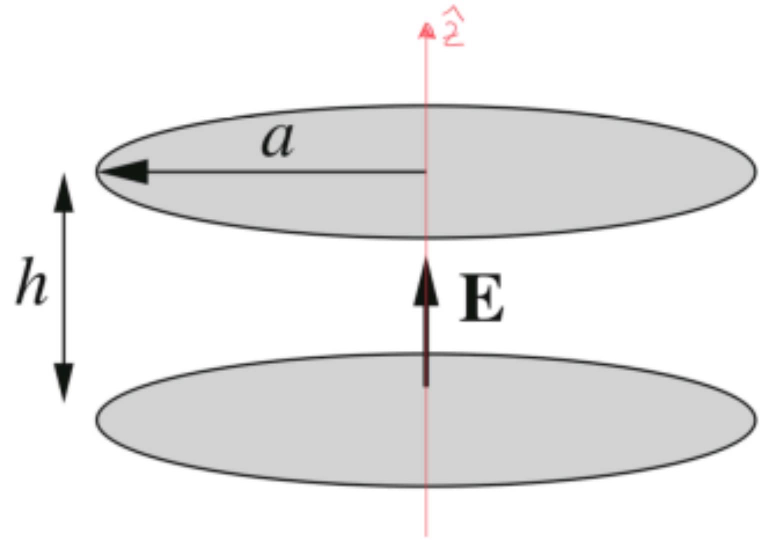
Problema 1 del 22/06/2021

Si consideri un condensatore a facce piane e parallele costituito da due dischi identici di raggio **a** posti ad una distanza **h** << **a**. Si stabilisce tra esse un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}} = \mathrm{E(t)}\hat{\boldsymbol{z}}$ (v. figura) con $\mathrm{E(t)} = \mathrm{E_0}\, \mathrm{t}/\tau$, dove τ è un tempo caratteristico. Supponendo di trascurare gli effetti ai bordi:

a) determinare il campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}$ all'interno del condensatore;

b) calcolare il vettore di Poynting e mostrare che il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa che racchiuda il condensatore è uguale alla variazione nel tempo dell'energia associata ai campi elettromagnetici;

c) dimostrare che il vettore di Poynting si può scrivere anche nella forma $\vec{\boldsymbol{S'}} = (1/\mu_0\, \mathrm{c})\varphi \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \mathrm{t}}$, dove $\vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi$. [Suggerimento: utilizzare i flussi dei vettori di Poynting calcolati in b) e in c).]



Problema 4 del 13/07/2023

Nel sistema del laboratorio, un protone di energia $U_1 = 7m_pc^2$, dove $m_pc^2 = 0.938$ GeV, urta frontalmente un secondo protone a riposo. Determinare:

a) la velocità β_{CQM} con cui si muove nel laboratorio il sistema di riferimento CQM del "centro della quantità di moto";

b) l'energia totale dei due protoni nel sistema di riferimento CQM.

[Suggerimento: usare l'invariante relativistico $p_\mu p^\mu$, dove p_μ è il quadrivettore energia-quantità di moto totale]

Problema 4 del 26/01/2023

Un fascio di ioni è lanciato con velocità $\beta_i = 0.90$, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale S, in una direzione inclinata di $45°$ gradi rispetto all'asse x. Un secondo sistema di riferimento S' trasla rispetto ad S con velocità $\beta = 0.60$ nella direzione positiva dell'asse x. Determinare:

a) il modulo della velocità degli ioni nel sistema S';

b) l'angolo di emissione α' rispetto all'asse x' di S'.

Problema 4 del 21/09/2023

Nel sistema di riferimento S del laboratorio si stabiliscono un campo elettrico $\overrightarrow{\mathbf{E}} = E\hat{\mathbf{z}}$ ed un campo magnetico $\overrightarrow{\mathbf{B}} = B\hat{\mathbf{y}}$, di intensità $E = 7.0 \cdot 10^4$ V/m e $B = 1.0 \cdot 10^{-4}$ T rispettivamente, in modo che siano ortogonali fra loro. Determinare:

a) se esiste un sistema di riferimento inerziale S', in moto rispetto ad S con velocità $\vec{\mathbf{v}} = v\hat{\mathbf{x}}$ e con gli assi ad esso paralleli, nel quale il campo elettrico $E' = 0$ e in caso affermativo determinare v.

b) se esiste un sistema di riferimento inerziale S', in moto rispetto ad S con velocità $\vec{\mathbf{v}} = v\hat{\mathbf{x}}$ e con gli assi ad esso paralleli, nel quale il campo elettrico $B'' = 0$ e in caso affermativo determinare v.

Problema 4 del 30/01/2024

Si consideri un muone in moto nel sistema di riferimento del laboratorio. Determinare:

a) la velocità che dovrebbe avere il muone perché la sua energia cinetica sia pari alla sua energia a riposo.

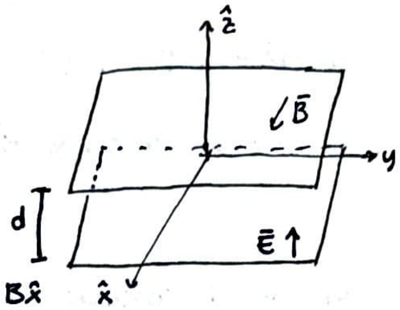
Sapendo che a massa del muone è $m_\mu = 1.88 \cdot 10^{-28}$ kg, determinare:

b) la velocità di una palla da tennis, di massa $m = 0.057$ kg, che abbia la stessa energia cinetica del muone.

ESERCITAZIONE 11.

PROBLEMA 1. DEL 27/01/2022

CONSIDERIAMO UN CONDENSATORE PIANO CON PIASTRE DI AREA A, SEPARATE DA UNA DISTANZA d, CON $d \ll \sqrt{A}$
→ QUINDI POSSIAMO TRASCURARE GLI EFFETTI DI BORDO E CONSIDERARE IL CAMPO ELETTRICO UNIFORME TRA LE PIASTRE



IL CAMPO ELETTRICO É $\bar{E} = E\hat{z}$
MENTRE IL CAMPO MAGNETICO É UNIFORME E VALE $\bar{B} = B\hat{x}$

a) DETERMINARE L'ENERGIA ELETTROMAGNETICA IMMAGAZZINATA TRA LE PIASTRE

LA DENSITÁ DI ENERGIA ELETTROMAGNETICA NEL VUOTO É
$u_{em} = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$ QUI I CAMPI SONO UNIFORMI NELLA REGIONE TRA LE PIASTRE, QUINDI LA DENSITÁ DI ENERGIA É COSTANTE

L'ENERGIA TOTALE É QUINDI $U = \int_V u_{em} dV$

u_{em} É cost

$= u_{em} V = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2\right) Ad$

EN. IMMAGAZZINATA NEL CAMPO EL. DEL CONDENSATORE

EN. MAGNETICA DEL CAMPO ESTERNO CONTENUTA NELLO STESSO VOLUME

b) DETERMINARE LA QUANTITÁ DI MOTO ELETTROMAGNETICA TRA LE PIASTRE

LA DENSITÁ DI QUANTITÁ DI MOTO DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO É
$\bar{g}_{em} = \varepsilon_0 \mu_0 \bar{S} = \frac{\bar{S}}{c^2}$

NEL VUOTO IL VETTORE DI POYNTING É $\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \times \bar{B}$

DA CUI $\bar{g}_{em} = \varepsilon_0 (\bar{E} \times \bar{B})$

NEL NOSTRO CASO, $\bar{E} = E\hat{z}$, $\bar{B} = B\hat{x}$ $\Rightarrow$ $\bar{E} \times \bar{B} = EB(\hat{z} \times \hat{x}) = EB\hat{y}$

DA CUI $\bar{g}_{em} = \varepsilon_0 EB\hat{y}$

LA QUANTITÁ DI MOTO TOTALE SI OTTIENE INTEGRANDO SUL VOLUME
$\bar{P}_{em} = \int_V \bar{g}_{em} dV = \varepsilon_0 EB\hat{y} \int_V dV$
$= \varepsilon_0 EBAd\,\hat{y}$

ANCHE SE LA CONFIGURAZIONE É STATICA, IL CAMPO EM. POSSIEDE QUANTITÁ DI MOTO PERCHÉ $\bar{E}$ E $\bar{B}$ SONO PRESENTI CONTEMPORANEAMENTE E IL LORO PRODOTTO VETTORIALE É NON NULLO

A $t = 0$ SI COLLEGA UN FILO LUNGO L'ASSE z TRA LE PIASTRE. IL CONDENSATORE SI SCARICA, QUINDI UNA CORRENTE $I(t)$ ATTRAVERSA IL FILO

c) DETERMINARE L'IMPULSO TOTALE APPLICATO AL SISTEMA DURANTE LA SCARICA

LA FORZA MAGNETICA SU UN TRATTO DI FILO PERCORSO DA CORRENTE É
$d\bar{F} = I d\bar{l} \times \bar{B}$

IL FILO É DISPOSTO LUNGO z, QUINDI $d\bar{l} = dz\,\hat{z}$

DA CUI $d\bar{F} = I dz (\hat{z} \times \bar{B}) = I dz B (\hat{z} \times \hat{x})$
$= I dz B\hat{y}$

INTEGRANDO SU TUTTO IL FILO, DALLA PIASTRA INFERIORE A QUELLA SUPERIORE, SI HA $\bar{F} = \int_0^d d\bar{F} = IB\hat{y}\int_0^d dz$

$= IBd\hat{y}$

$\Rightarrow \bar{F}(t) = I(t)Bd\hat{y}$

L'IMPULSO TOTALE É $\bar{J} = \int \bar{F}(t)\,dt = Bd\hat{y}\underbrace{\int I(t)\,dt}_{\text{CARICA TOTALE CHE ATTRAVERSA IL FILO DURANTE LA SCARICA}}$

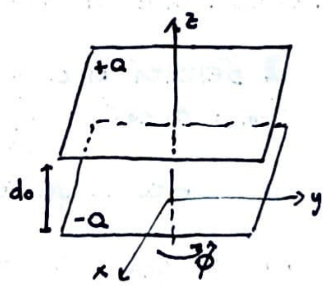
LA CARICA TOTALE SULLE ARMATURE DEL CONDENSATORE É
$Q_0 = \varepsilon_0 EA$ → INFATTI PER UN CONDENSATORE PIANO
$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ CON $\sigma = \frac{Q_0}{A}$ $\Rightarrow E = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A}$

DURANTE LA SCARICA TUTTA QUESTA CARICA ATTRAVERSA IL FILO, QUINDI
$\int I(t)\,dt = Q_0$

DA CUI $\bar{J} = \varepsilon_0 EBdA\hat{y}$

PROBLEMA 1. DEL 26/01/2023 v. 07/09/2021

CONSIDERIAMO DUE LASTRE QUADRATE DI LATO $L = 0.10\ m$
POSTE INIZIALMENTE A DISTANZA $d_0 = 10^{-3}\ m$, CON
CARICA INIZIALE $Q_0 = 100\ \mu C$
SONO COLLEGATE A UNA BATTERIA, QUINDI LA DDP RESTA
COSTANTE
A UN CERTO ISTANTE INIZIANO AD ALLONTANARSI
RIMANENDO PARALLELE CON VELOCITÁ $v = 0.01\ m/s$



LA DISTANZA TRA LE LASTRE É $d(t) = d_0 + vt$
L'AREA É $A = L^2$
ALL'ISTANTE INIZIALE LA CAPACITÁ É $C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_0} = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d_0}$

LA DDP INIZIALE É $V_0 = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q_0 d_0}{\varepsilon_0 L^2}$
POICHÉ LA BATTERIA MANTIENE COSTANTE LA DDP, SI HA $V(t) = V_0$

QUINDI IL CAMPO ELETTRICO TRA LE PIASTRE É $E(t) = \frac{V_0}{d(t)} = \frac{Q_0 d_0}{\varepsilon_0 L^2 d(t)}$

a) DETERMINARE $\bar{B}$ A DISTANZA $r = 0.1\ m$ DALL'ASSE PASSANTE PER IL CENTRO DELLE LASTRE

IL CAMPO ELETTRICO VARIA NEL TEMPO, QUINDI COMPARE UNA CORRENTE DI SPOSTAMENTO
USIAMO LA LEGGE DI AMPÉRE-MAXWELL $\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

PER SIMMETRIA, IL CAMPO MAGNETICO É AZIMUTALE $\bar{B} = B_\phi(r,t)\,\hat{\phi}$

PRENDIAMO UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO r CENTRATA SULL'ASSE DEL CONDENSATORE

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{\ell} = B_\phi(r,t)\, 2\pi r$$

IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE CIRCOLARE É

$$\Phi_E = E(t)\pi r^2$$

QUINDI $B_\phi(r,t)\, 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE(t)}{dt} \pi r^2 \Rightarrow B_\phi(r,t) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2} \frac{dE(t)}{dt}$

ORA, $E(t) = \frac{V_0}{d(t)} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\frac{V_0}{d(t)^2}\frac{dd(t)}{dt} = -\frac{V_0}{d(t)^2} 2v$

$$= -\frac{2 Q_0 d_0 v}{\varepsilon_0 L^2}\frac{1}{d(t)^2}$$

DA CUI $B_\phi(r,t) = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2}\frac{Q_0 d_0 v}{\varepsilon_0 L^2}\frac{2}{(d_0+vt)^2} = -\frac{\mu_0 r Q_0 d_0 v}{L^2}\frac{1}{(d_0+vt)^2}$

b) DETERMINARE MODULO, DIREZIONE E VERSO DEL VETTORE DI POYNTING

IL VETTORE DI POYNTING É $\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} \bar{E} \times \bar{B}$

TRA LE LASTRE IL CAMPO ELETTRICO É DIRETTO LUNGO z: $\bar{E} = E(t)\hat{z}$

IL CAMPO MAGNETICO INDOTTO É AZIMUTALE $\bar{B} = B_\phi(r,t)\hat{\phi}$

$dE/dt < 0$, QUINDI $B_\phi < 0$ $\Rightarrow \bar{B} \parallel -\hat{\phi}$

QUINDI $\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} E(t) B_\phi(r,t) (\hat{z} \times \hat{\phi})$

$$= \frac{1}{\mu_0} E(t) B_\phi(r,t)\, \hat{\rho}$$

L'ENERGIA EM ESCE DALLA REGIONE TRA LE PIASTRE

IL MODULO É $S = \frac{1}{\mu_0} E |B_\phi| = \frac{\varepsilon_0 r V_0^2}{d(t)^3} = \frac{r v Q_0^2 d_0^2}{\varepsilon_0 A^2 d(t)^3}$

DA CUI $\bar{S} = \frac{r v Q_0^2 d_0^2}{\varepsilon_0 A^2 d(t)^3}\hat{\rho}$

c) DETERMINARE LA POTENZA TOTALE DI RADIAZIONE RACCOLTA SU UNA SFERA DI RAGGIO $R \gg L$

ORA, NEL MODELLO IDEALE DI CONDENSATORE CON LASTRE CHE SI ALLONTANANO UNIFORMEMENTE ~~con~~ E CON DDP COSTANTE, IL MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO RESTA COSTANTE

INFATTI $p(t) = Q(t)d(t) = C(t)V_0 d(t)$

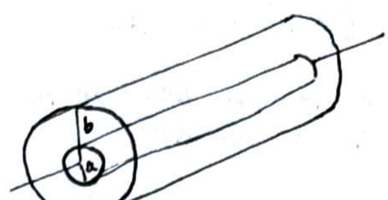
$$= \frac{\varepsilon_0 A}{d(t)} V_0 d(t) = \varepsilon_0 A V_0 = \text{cost}$$

LA RADIAZIONE DI DIPOLO ELETTRICO DIPENDE DA $\ddot{\bar{p}} \Rightarrow \ddot{\bar{p}} = 0$ QUINDI NON C'É RADIAZIONE

LA POTENZA IRRADIATA A GRANDE DISTANZA É $P_{rad} = 0$

PROBLEMA 1. DA 05/09/2022

CONSIDERIAMO UN SOLENOIDE INFINITO DI RAGGIO b CON n SPIRE PER UNITÁ DI LUNGHEZZA PERCORSO DA CORRENTE I



IL CAMPO MAGNETICO DEL SOLENOIDE É

$$\bar{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z} & \rho < b \\ 0 & \rho > b \end{cases}$$

c'É POI UN GUSCIO CILINDRICO COASSIALE DI RAGGIO $a<b$, CON DENSITÁ DI CARICA LINEARE POSITIVA λ

PER LA SIMMETRIA CILINDRICA, $\bar{E} = E(\rho)\hat{\rho}$

USIAMO LA LEGGE DI GAUSS SU UN CILINDRO COASSIALE DI RAGGIO ρ E LUNGHEZZA L

→ PER $\rho<a$, LA CARICA RACCHIUSA É NULLA $\quad \bar{E}=0 \quad \rho<a$

PER $\rho>a$, LA CARICA RACCHIUSA É λL ⇒ $E\, 2\pi\rho l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$

$$\bar{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\hat{\rho} \qquad \rho>a$$

a) DETERMINARE LA QUANTITÁ DI MOTO TOTALE PER UNITÁ DI LUNGHEZZA

LA DENSITÁ DI QUANTITÁ DI MOTO DEL CAMPO É
$\bar{g}_{em} = \varepsilon_0 \bar{E}\times\bar{B}$

I CAMPI SONO ENTRAMBI NON NULLI NELLA REGIONE $a<\rho<b$
DA CUI $\bar{g}_{em} = \varepsilon_0 \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\right)(\mu_0 n I)\underbrace{(\hat{\rho}\times\hat{z})}_{-\hat{\phi}}$

$$= -\frac{\mu_0 n I \lambda}{2\pi\rho}\hat{\phi} \qquad a<\rho<b$$

LA QUANTITÁ DI MOTO PER UNITÁ DI LUNGHEZZA É $\frac{\bar{p}_{em}}{L} = \int \bar{g}_{em}\, dA$

MA $\bar{g}_{em}$ É AZIMUTALE → INTEGRANDO SU TUTTO L'ANELLO CILINDRICO, I CONTRIBUTI NELLE VARIE DIREZIONI SI CANCELLANO PER SIMMETRIA

$$\Rightarrow \frac{\bar{p}_{em}}{L} = 0$$

b) DETERMINARE IL MOMENTO DELLA QUANTITÁ DI MOTO PER UNITÁ DI LUNGHEZZA

IL MOMENTO ANGOLARE ELETTROMAGNETICO É $\bar{L}_{em} = \int \bar{r}\times\bar{g}_{em}\, dV$

PER UNITÁ DI LUNGHEZZA, $\frac{\bar{L}_{em}}{L} = \int \bar{r}\times\bar{g}_{em}\, dA$

QUI $\bar{r} = \rho\hat{\rho}$ E $\bar{g}_{em} = -\frac{\mu_0 n I \lambda}{2\pi\rho}\hat{\phi}$

DA CUI $\bar{r}\times\bar{g}_{em} = -\frac{\mu_0 n I \lambda}{2\pi}\underbrace{(\hat{\rho}\times\hat{\phi})}_{\hat{z}} = -\frac{\mu_0 n I \lambda}{2\pi}\hat{z}$

ORA INTEGRIAMO SULL'AREA DELL'ANELLO $a<\rho<b$

$$\frac{\bar{\tau}_{em}}{L} = -\frac{\mu_0 n I \lambda}{2\pi}\hat{z}\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_a^b \rho\, d\rho\, d\phi}_{2\pi\frac{(b^2-a^2)}{2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 n I \lambda}{2}(b^2-a^2)\hat{z}$$

c) DETERMINARE IL MOMENTO PER UNITÁ DI LUNGHEZZA DELLA FORZA TOTALE AGENTE SUL GUSCIO QUANDO VARIA I

SE LA CORRENTE I CAMBIA NEL TEMPO, CAMBIA ANCHE IL CAMPO MAGNETICO DEL SOLENOIDE $\Rightarrow B(t) = I(t)\mu_0 n$

PER LA LEGGE DI FARADAY, NASCE UN CAMPO ELETTRICO INDOTTO AZIMUTALE

CONSIDERIAMO UN CAMMINO CIRCOLARE DI RAGGIO $a<\rho<b$: $\oint \bar{E}_{ind}\cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO ATTRAVERSO LA CIRCONFERENZA DI RAGGIO ρ É $\Phi_B = B(t)\pi\rho^2$

QUINDI $E_\phi(\rho)\,2\pi\rho = -\pi\rho^2\frac{dB(t)}{dt} \Rightarrow E_\phi(\rho) = -\frac{\rho}{2}\frac{dB(t)}{dt}$

ORA, $\frac{dB(t)}{dt} = \mu_0 n\frac{dI(t)}{dt} \Rightarrow E_\phi(\rho) = -\frac{\rho}{2}\mu_0 n\frac{dI(t)}{dt}$

SUL GUSCIO $\rho = a \Rightarrow E_\phi(a) = -\frac{a\mu_0 n}{2}\frac{dI(t)}{dt}$

LA FORZA TANGENZIALE PER UNITÁ DI LUNGHEZZA SUL GUSCIO É

$$\frac{\bar{F}}{L} = \lambda E_\phi(a)\hat{\phi} = -\frac{\lambda a\mu_0 n}{2}\frac{dI(t)}{dt}\hat{\phi}$$

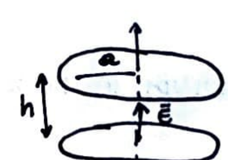
IL MOMENTO DELLA FORZA PER UNITÁ DI LUNGHEZZA É

$$\frac{\bar{\tau}}{L} = a\hat{\rho}\times\frac{\bar{F}}{L} = a\left(-\frac{\lambda a\mu_0 n}{2}\frac{dI(t)}{dt}\right)\underbrace{(\hat{\rho}\times\hat{\phi})}_{\hat{z}}$$

$$= -\frac{\mu_0 n\lambda a^2}{2}\frac{dI(t)}{dt}\hat{z}$$

<u>PROBLEMA 1.</u> DEL <u>22/06/2021</u>

CONSIDERIAMO DUE DISCHI DI RAGGIO a, SEPARATI DA UNA DISTANZA $h \ll a$



IL CAMPO ELETTRICO TRA LE ARMATURE É UNIFORME E DIRETTO LUNGO z : $\bar{E}(t) = E(t)\hat{z} = E_0\frac{t}{\tau}\hat{z}$ CON τ TEMPO CARATTERISTICO

USIAMO COORDINATE CILINDRICHE (ρ,ϕ,z) PERCHÉ IL CONDENSATORE HA SIMMETRIA CILINDRICA

a) DETERMINARE IL CAMPO MAGNETICO ALL'INTERNO DEL CONDENSATORE

IL CAMPO ELETTRICO VARIA NEL TEMPO, QUINDI GENERA UN CAMPO MAGNETICO TRAMITE LA LEGGE DI AMPÉRE-MAXWELL

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

PER SIMMETRIA, IL CAMPO MAGNETICO DEVE ESSERE TANGENTE A CIRCONFERENZE CONCENTRICHE CON L'ASSE DEL CONDENSATORE, QUINDI $\bar{B} = B_\phi(\rho, t)\hat{\phi}$

PRENDIAMO COME CAMMINO AMPERIANO UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO $\rho < a$, CENTRATA SULL'ASSE z $\Rightarrow$ $\oint \bar{B} \cdot d\bar{\ell} = B_\phi(\rho, t) 2\pi\rho$

IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO IL DISCO DI RAGGIO ρ É $\Phi_E = E(t)\pi\rho^2$

QUINDI $B_\phi(\rho,t) 2\pi\rho = \mu_0\varepsilon_0 \pi\rho^2 \frac{dE(t)}{dt}$ $\Rightarrow$ $B_\phi(\rho,t) = \frac{\mu_0\varepsilon_0\rho}{2}\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\mu_0\varepsilon_0\rho}{2}\frac{E_0}{\tau}$

DA CUI $\bar{B} = \frac{\mu_0\varepsilon_0\rho}{2\tau}E_0\hat{\phi} = \frac{\rho}{2\tau c^2}E_0\hat{\phi}$

b) DETERMINARE IL VETTORE DI POYNTING

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0}\bar{E}\times\bar{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(E_0\frac{t}{\tau}\right)\left(\frac{\rho}{2\tau c^2}E_0\right)\underbrace{(\hat{z}\times\hat{\phi})}_{-\hat{\rho}} = -\frac{\varepsilon_0\rho E_0^2}{2\tau^2}t\hat{\rho}$$

$\bar{S}$ É DIRETTO RADIALMENTE VERSO L'INTERNO $(-\hat{\rho})$

ORA STUDIAMO IL SUO FLUSSO $\rightarrow$ CONSIDERIAMO COME SUPERFICIE CHIUSA IL CILINDRO CHE RACCHIUDE IL VOLUME TRA LE ARMATURE DI RAGGIO a, ALTEZZA h E ASSE LUNGO z

$\bar{S}$ É RADIALE, QUINDI ATTRAVERSA SOLO LA SUPERFICIE ~~RADIALE~~ LATERALE DEL CILINDRO $\rightarrow$ SULLA BASE INFERIORE E SUPERIORE NON CONTRIBUISCE

SULLA SUPERFICIE LATERALE, $d\bar{A} = a\,dz\,d\phi\,\hat{\rho}$

IN $\rho = a$, $\bar{S}(a,t) = -\frac{\varepsilon_0 a E_0^2}{2\tau^2}t\hat{\rho}$

QUINDI IL FLUSSO É $\Phi_S = \oint \bar{S}\cdot d\bar{A} = -\frac{\varepsilon_0 a E_0^2 t}{2\tau^2}\int_0^{2\pi}\int_0^h a\,dz\,d\phi\,\hat{\rho} = -\frac{\varepsilon_0\pi a^2 E_0^2 h t}{\tau^2}\hat{\rho}$

L'ENERGIA ELETTROMAGNETICA IMMAGAZZINATA TRA LE ARMATURE É

$U_{EM} = U_E + U_B$

L'ENERGIA ELETTRICA IMMAGAZZINATA TRA LE ARMATURE É

$$U_E = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, dV$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \pi a^2 h \frac{dE(t)^2}{dt} = \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{E_0 t}{\tau}\right)^2 = \frac{E_0^2}{\tau^2}\frac{dt^2}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \pi a^2 h \quad \rightarrow \quad \frac{dU_E}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 h E_0^2}{\tau^2} t$$

L'ENERGIA MAGNETICA É INVECE

$$U_B = \int \frac{1}{2\mu_0} B^2 \, dV$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\rho}{2\tau c^2} E_0\right)^2 \pi a^2 h \quad \rightarrow \quad \frac{dU_B}{dt} = 0$$

DI CONSEGUENZA, $\frac{dU_{EM}}{dt} = \frac{dU_E}{dt} + \frac{dU_B}{dt} = \frac{dU_E}{dt} = -\Phi_S$

c) DIMOSTRARE CHE IL VETTORE DI POYNTING SI PUÓ SCRIVERE NELLA FORMA $\bar{S}' = \frac{1}{\mu_0 c^2} \varphi \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ DOVE $\bar{E} = -\bar{\nabla}\varphi$

NEL NOSTRO CASO, $\bar{E} = E(t)\hat{z}$

DI CONSEGUENZA, $-\bar{\nabla}\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{z} = -[-E(t)]\hat{z} = +E(t)\hat{z}$

$\Rightarrow \varphi(z,t) = -E(t) z$

ALLORA $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{dE}{dt}\hat{z}$

$$\Rightarrow \bar{S}' = \frac{1}{\mu_0}(\bar{E} \times \bar{B}) = \frac{1}{\mu_0}(-\bar{\nabla}\varphi \times \bar{B})$$

$$= \frac{1}{\mu_0}(\bar{B} \times \bar{\nabla}\varphi)$$

ORA, $\bar{\nabla} \times (\varphi \bar{B}) = \bar{\nabla}\varphi \times \bar{B} + \varphi \bar{\nabla} \times \bar{B} \Rightarrow \bar{\nabla}\varphi \times \bar{B} = \bar{\nabla} \times (\varphi\bar{B}) - \varphi(\bar{\nabla} \times \bar{B})$

SOSTITUENDO, $\bar{S}' = -\frac{1}{\mu_0}[\bar{\nabla} \times (\varphi\bar{B}) - \varphi(\bar{\nabla} \times \bar{B})]$

ORA, PER LA LEGGE DI AMPÉRE-MAXWELL, $\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

DA CUI $\bar{S} = -\frac{1}{\mu_0}\bar{\nabla} \times (\varphi\bar{B}) + \overset{1/\mu_0 c^2}{\varepsilon_0} \varphi \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

$$= \bar{S}' - \frac{1}{\mu_0}\bar{\nabla} \times (\varphi\bar{B})$$

QUINDI $\bar{S}'$ NON É ESATTAMENTE UGUALE LOCALMENTE A $\bar{S}$, MA I DUE DIFFERISCONO PER UN TERMINE DI ROTORE

→ PERÓ IL FLUSSO DI UN ROTORE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA É NULLO $\oint_{\partial V} \bar{\nabla} \times (\varphi\bar{B}) \cdot d\bar{A} = 0$

PROBLEMA 4. DEL 13/07/2023

NEL SDR DEL LABORATORIO UN PROTONE DI ENERGIA $U_1 = 7m_pc^2$ URTA UN SECONDO PROTONE A RIPOSO

IL PROTONE 2 É FERMO, QUINDI HA ENERGIA $U_2 = m_pc^2$

L'ENERGIA TOTALE NEL LABORATORIO É QUINDI $U_{tot} = U_1 + U_2 \overset{!}{=} 8m_pc^2$

IL MOMENTO DEL PROTONE 1 SI TROVA DA $U_1^2 = p_1^2c^2 + m_pc^4$
$\Rightarrow p_1c = \sqrt{U_1^2 - m_pc^4} = \sqrt{48}\, m_pc^2$

LA QUANTITÁ DI MOTO TOTALE NEL LABORATORIO É QUELLA DEL PROTONE INCIDENTE $P_{tot} = p_1$

LA VELOCITÁ DEL SISTEMA DEL CENTRO DI QUANTITÁ DI MOTO É $V_{CdM} = \frac{c^2 P_{tot}}{E_{tot}}$

$$\Rightarrow \beta_{CdM} = \frac{cP_{tot}}{U_{tot}} = \frac{\sqrt{48}\, m_pc^2}{8\, m_pc^2} = \frac{\sqrt{48}}{8} \simeq 0.87$$

PER TROVARE L'ENERGIA DEI DUE PROTONI NEL SDR CdM
→ PER SINGOLA PARTICELLA SAPPIAMO CHE VALE $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ É UN INVARIANTE RELATIVISTICO, OVVERO VALE PER TUTTI I SDR

$$E_{lab}^2 - p_{lab}^2c^2 = E_{CdM}^2 - \underbrace{p_{CdM}^2}_{0}c^2 \Rightarrow E_{CdM}^2 = E_{lab}^2 - p_{lab}^2c^2 \overset{!}{=} (8m_pc^2)^2 - (\sqrt{48}\, m_pc^2)^2 \overset{!}{=} 16\, m_p^2c^4 \overset{!}{\simeq} 3.75 \text{ GeV}$$

PROBLEMA 4. DEL 26/01/2023

UN FASCIO DI IONI É LANCIATO CON VELOCITÁ $\beta_i = 0.90$ RISPETTO A UN SDR INERZIALE S, IN UNA DIREZIONE INCLINATA DI $\theta = 45°$ RISPETTO A X
S' TRASLA RISPETTO AD S DI $\beta = 0.60$ SEMPRE LUNGO X

LE COMPONENTI SONO
$$\beta_x = \beta_i \cos\theta = \frac{\beta_i}{\sqrt{2}}$$
$$\beta_y = \beta_i \sin\theta = \frac{\beta_i}{\sqrt{2}}$$

IL SISTEMA S' SI MUOVE RISPETTO A S CON $\beta = 0.60$ LUNGO +X
PER PASSARE DA S A S':
$$\begin{cases} \beta_x' = \dfrac{\beta_x - \beta}{1 - \beta\beta_x} \\ \beta_y' = \dfrac{\beta_y}{\gamma(1 - \beta\beta_x)} \end{cases}$$

QUANDO LA VELOCITÁ NON É PARALLELA AL MOTO RELATIVO DEI SISTEMI, BISOGNA TRASFORMARE SEPARATAMENTE LA COMPONENTE PARALLELA E PERPENDICOLARE

CON $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} = 1.25$

DA CUI
$$\begin{cases} \beta_x' \simeq 0.059 \\ \beta_y' \simeq 0.824 \end{cases}$$

QUINDI IL MODULO É $\beta' = \sqrt{\beta_x'^2 + \beta_y'^2} \simeq 0.826 \Rightarrow v' = 0.826\,c$

L'ANGOLO NEL SISTEMA S' É $\tan\theta' = \frac{\beta_y'}{\beta_x'} \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{0.824}{0.058}\right) \simeq 85.9°$

PROBLEMA 4. DEL 21/09/2023

NEL SDR S DEL LABORATORIO SI STABILISCONO $\bar{E} = E\hat{z}$, $\bar{B} = B\hat{y}$

DI INTENSITÁ $E = 7.0 \cdot 10^4$ V/m, $B = 1.0 \cdot 10^{-4}$ T

IL SISTEMA S' SI MUOVE RISPETTO A S, CON $\bar{v} = v\hat{x}$

PER UN BOOST LUNGO X, SE I CAMPI SONO PERPENDICOLARI A X, VALGONO

$$\begin{cases} \bar{E}' = \gamma(\bar{E} + \bar{v}\times\bar{B}) \\ \bar{B}' = \gamma\left(\bar{B} - \frac{1}{c^2}\bar{v}\times\bar{E}\right) \end{cases}$$

$\bar{v}\times\bar{B} = vB(\hat{x}\times\hat{y}) = vB\hat{z} \Rightarrow \bar{E}' = \gamma(\bar{E} + vB\hat{z}) = \gamma(E + vB)\hat{z}$

PER AVERE $E' = 0 \Rightarrow E + vB = 0$, CIOÉ $v = -\frac{E}{B} = -\frac{7\cdot 10^4}{1\cdot 10^{-4}} = 7\cdot 10^8$ m/s $> c$

$\Rightarrow$ NON ESISTE UN SISTEMA INERZIALE IN CUI $\bar{E}' = 0$

$\bar{v}\times\bar{E} = vE(\hat{x}\times\hat{z}) = -vE\hat{y} \Rightarrow \bar{B}' = \gamma\left(\bar{B} + \frac{1}{c^2}vE\hat{y}\right) = \gamma\left(B + \frac{vE}{c^2}\right)\hat{y}$

PER AVERE $B' = 0 \Rightarrow B + \frac{vE}{c^2} = 0$, CIOÉ $v = -\frac{Bc^2}{E} = \ominus 1.29 \cdot 10^8$ m/s

IL SISTEMA DEVE MUOVERSI LUNGO $-\hat{x}$

PROBLEMA 4. DEL 30/01/2024

MUONE IN MOTO NEL SDR DEL LABORATORIO

L'ENERGIA CINETICA RELATIVISTICA É $K = (\gamma - 1)mc^2$

SE L'EN. CINETICA É UGUALE ALL'ENERGIA A RIPOSO, $K = mc^2$

$(\gamma-1)mc^2 = mc^2 \rightarrow \gamma = 2$

ORA, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow v \simeq 0.86\,c$

SE HO UNA PALLA DA TENNIS CON LA STESSA K_μ DEL MUONE, $K_\mu = (\gamma-1)m_\mu c^2 \simeq 1.69 \cdot 10^{-11}$ J

PER LA PALLA DA TENNIS LA VELOCITÀ SARÀ PICCOLA, QUINDI SI PUÒ USARE L'ENERGIA CINETICA CLASSICA $K = \frac{1}{2} m v^2$ CON $m = 0.057$ Kg

DA CUI $v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \simeq 2.6 \cdot 10^{-5}$ m/s

VELOCITÀ ESTREMAMENTE PICCOLA, PERCHÉ L'EN. A RIPOSO DI UN M È ENORME RISPETTO ALLE ENERGIE CINETICHE MACROSCOPICHE A VELOCITÀ ORDINARIE