Note del Corso di GEOMETRIA 2
A.A. 2025/2026

Prof. Valentina Beorchia

Gennaio 2026

Indice

Capitolo 1

Spazi affini

Definizione 1.0.1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Uno spazio affine su V è un insieme non vuoto $\mathbb{A}$, i cui elementi si dicono i punti di $\mathbb{A}$, ed una funzione

$$\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V, \quad \sigma(P, R) = \overrightarrow{PR},$$

tale che valgano i seguenti assiomi:

(SA1) per ogni $P \in A$ e per ogni $v \in V$, $\exists! R \in A$ tale che $v = \overrightarrow{PR}$;

(SA2) per ogni terna di punti (non necessariamente distinti) $P, Q, R \in A$ si ha $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Proposizione 1.0.2. *Dai due assiomi di spazio affine si hanno le seguenti proprietà:*

1. *per ogni $P \in \mathbb{A}$ si ha $\overrightarrow{PP} = 0 \in V$;*
2. *per ogni $P, R \in \mathbb{A}$, si ha $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$;*
3. *per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, la funzione $f_P : \mathbb{A} \to V$, $f_P(Q) = \overrightarrow{PQ}$ è una biiezione.*

Dimostrazione. (1) Dall'assioma (SA2), ponendo $P = Q = R$, si ha

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP},$$

e sommando ad entrambi i membri il vettore $\overrightarrow{PP}$ si ha la tesi.

(2) Dall'assioma (SA2), ponendo $R = P$, si ha

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$$

per il primo punto, quindi $\overrightarrow{QP}$ è il vettore opposto di $\overrightarrow{PQ}$.

(3) La tesi segue direttamente dall'assioma (SA1). □

Definizione 1.0.3. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora definiamo la dimensione di $\mathbb{A}$ come

$$\dim \mathbb{A} := \dim V.$$

Se $\dim \mathbb{A} = 1$, allora $\mathbb{A}$ si dice *retta affine*; se $\dim \mathbb{A} = 2$, allora $\mathbb{A}$ si dice *piano affine*.

Proposizione 1.0.4. *Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V, l'applicazione*

$$t : \ \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A} \quad \textit{definita da} \quad (P, v) \mapsto Q \ : \ \overrightarrow{PQ} = v$$

verifica: $\forall P \in \mathbb{A}, \ \forall v, w \in V$ *vale* $t(t(P, v), w) = t(P, (v + w))$

Dimostrazione. Per SA1, fissati P e v, esiste un unico punto Q tale che $v = \overrightarrow{PQ}$. D'altra parte, per la stessa ragione, esiste un unico punto R tale che $w = \overrightarrow{QR}$. Pertanto

$$v + w = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

dove la seconda uguaglianza segue da (SA2). In conclusione si ha

$$t(t(P, v), w) = t(t(P, \overrightarrow{PQ}), w) = t(Q, w) = t(Q, \overrightarrow{QR}) = Rt(P, \overrightarrow{PR}) = t(P, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = t(P, v + w).$$

come volevamo. $\square$

Fissando il vettore v nel secondo fattore del dominio di t si ottiene una biiezione di $\mathbb{A}$ come segue.

Definizione 1.0.5. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V e $v \in V$ è un vettore fissato, l'applicazione

$$t_v : \ \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad P \mapsto t_v(P) := Q, \quad v = \overrightarrow{PQ}$$

si dice *traslazione di $\mathbb{A}$ lungo v*.

Osservazione 1.0.6. Dato V spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$, possiamo definire una *struttura di spazio affine in V su se stesso*, ponendo:

$$\overrightarrow{vw} := w - v.$$

Si verifica facilmente che gli assiomi sono verificati.

Definizione 1.0.7. In particolare, se $V = \mathbb{K}^n$, una struttura di spazio affine su $\mathbb{K}^n$ è data da:

$$\sigma : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad \sigma((p_1, p_2, ..., p_n), (q_1, q_2, ..., q_n)) := \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ}.$$

Lo spazio affine così definito verrà indicato con il simbolo $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, e si dice *spazio affine standard*.

Vediamo ora come associare delle coordinate a un punto di uno spazio affine arbitrario. Useremo la nozione di coordinate di un vettore in una base, e per fare ciò dobbiamo fissare un punto, che chiameremo origine.

Definizione 1.0.8. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V. Un *riferimento affine* per $\mathbb{A}$ è il dato di:

- un punto $O \in \mathbb{A}$;
- una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V.

Il punto O si dice *origine del riferimento*.

Dato un punto $P \in \mathbb{A}$ qualsiasi, possiamo definire le *coordinate di* P come le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ nella base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, cioè se

$$\overrightarrow{OP} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$

definiamo l'n-upla $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ come le coordinate di P.

Convenzione 1.0.9. Per distinguere le coordinate di vettori dalle coordinate di punti di spazi affini, useremo la seguente notazione:

- le coordinate di un vettore verranno indicate in colonna: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$;
- le coordinate di un punto verranno indicate in riga: $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$.

Esempio 1.0.10. Se $\mathbb{A}$ è una retta affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da un vettore non nullo $v \in V$.

Se $\mathbb{A}$ è un piano affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da due vettori non nulli e non proporzionali $v_1, v_2 \in V$.

Definizione 1.0.11. In $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ possiamo scegliere il seguente riferimento:

- il punto $O \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ di componenti nulle $O = (0, \cdots, 0)$;
- la base canonica di $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo riferimento si dice *riferimento affine canonico* di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

1.1 Sottospazi affini e loro equazioni

Definizione 1.1.1. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V. Fissati

- un punto $Q \in \mathbb{A}$, e
- un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$,

il *sottospazio affine passante per* Q *e parallelo a* W è il sottoinsieme di $\mathbb{A}$ definito da

$$S = \{P \in A \mid \overrightarrow{QP} \in W\}.$$

Il sottospazio $W \subseteq V$ si chiama *giacitura di* S.

Dalla definizione seguono subito le seguenti proprietà:

Proposizione 1.1.2. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V. Si ha:*

1. *se S è un sottospazio affine passante per Q e di giacitura W, allora $Q \in S$.*
2. *Per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in S$, si ha $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$.*
3. *S ha una struttura di spazio affine su W.*

Definizione 1.1.3. Sia $S \subseteq A$ un sottospazio affine di giacitura W. Definiamo

$$\dim S := \dim W.$$

Se $\dim S = \dim \mathbb{A} - 1$, allora S si dice *iperpiano* di $\mathbb{A}$.

Vediamo ora che riscrivendo la definizione di sottospazio affine in coordinate, possiamo descrivere i sottospazi affini tramite equazioni parametriche.

Osservazione 1.1.4. Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sottospazio affine passante per un punto $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e di giacitura $W \subseteq \mathbb{K}^n$. Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base del sottospazio vettoriale W. Fissiamo le componenti dei vettori w_i (come elementi di $\mathbb{K}^n$)

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad w_m = \begin{pmatrix} w_{1m} \\ w_{2m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S \iff \overrightarrow{QP} \in W \iff \exists t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{K} : \overrightarrow{QP} = t_1 w_1 + t_2 w_2 + \dots + t_m w_m.$$

Definizione 1.1.5. Usando le stesse notazioni di cui sopra, le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \dots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

si dicono *equazioni parametriche di* S.

Osservazione 1.1.6. Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni parametriche. Più precisamente, abbiamo che un sottospazio affine è univocamente determinate dalla sua giacitura e da uno qualsiasi dei suoi punti (esercizio).

Le equazioni parametriche non sono l'unico modo di codificare un sottospazio affine. Infatti, può essere anche assegnato mediante equazioni cartesiane nel modo seguente.

Teorema 1.1.7. *Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni lineari di ordine n a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$. Se $A \cdot x = b$ è compatibile, allora l'insieme delle sue soluzioni*

$$S = \{s \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot s = b\}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n_K$ la cui giacitura è il sottospazio vettoriale W di $\mathbb{K}^n$ formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$W = \{s \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot s = 0\}.$$

In tal caso $\dim(S) = n - rk(A)$, e per ogni $s \in S$, il sottoinsieme S coincide con il sottospazio affine di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ passante per s e parallelo a W.

Dimostrazione. Poiché il sistema lineare è compatibile, S non è vuoto. Sia dunque $\tilde{s}$ una sua soluzione. Per il teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, ogni altra soluzione s si può scrivere nella forma

$$s = \tilde{s} + w, \quad w \in W.$$

Quindi si ha

$$s \in S \iff s - \tilde{s} \in W.$$

Per definizione, S risulta il sottospazio affine di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ passante per $\tilde{s}$ di giacitura W. Infine, per il Teorema di Dimensione, $\dim W = n - \text{rk}(A) = \dim S$. □

Definizione 1.1.8. Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sottospazio affine. Un sistema di equazioni cartesiane per S è un qualunque sistema di equazioni lineari $Ax = b$, tale che

$$S = \{s \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid A \cdot s = b\}.$$

Osservazione 1.1.9. (1) Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni cartesiane.

Infatti, se $S = \{s \in A^n_K \mid A \cdot s = b\}$, allora per ogni sistema di equazioni lineari $\widetilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ equivalente ad $A \cdot x = b$, le equazioni di $\widetilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ sono delle equazioni cartesiane per S.

(2) Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Allora il punto $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ appartiene a S se e solo se $b = 0$, cioè se e solo se il sistema di equazioni lineari è omogeneo.

1.1.1 Passaggio da equazioni parametriche a cartesiane

Vediamo ora che in realtà tutti i sottospazi affini ammettono delle equazioni cartesiane, e che esse possono essere ottenute dalle equazioni parametriche.

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sottospazio affine dato dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \cdots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \cdots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \cdots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

Ricordiamo che un punto $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ appartiene a S se e solo se il vettore

$$\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix} \right),$$

e ciò succede se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1m} & x_1 - q_1 \\ w_{21} & \cdots & w_{2m} & x_2 - q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nm} & x_n - q_n \end{pmatrix}$$

ha rango m. Mettendo la matrice a scala, la condizione si traduce nell'annullamento delle ultime $n - m$ entrate dell'ultima colonna.

1.1.2 Passaggio da equazione cartesiane a parametriche

Vediamo ora come passare da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche.

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sottospazio affine dato dalle equazioni cartesiane $A \cdot x = b$.

Per trovare delle equazioni parametriche per S, si risolve il sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$, esprimendo le sue soluzioni in funzione di opportune variabili libere $t_1, \ldots, t_m$, che equivale a trovare una soluzione particolare Q di $Ax = b$, ed una base $w_1, \ldots, w_m$ dello spazio W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot x = 0$, in modo che

$$S = Q + W = Q + t_1 w_1 + \cdots + t_m w_m,$$

al variare di $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{K}$.

1.2 Intersezioni tra sottospazi affini

In questa sezione vedremo che data una famiglia arbitraria di sottospazi affini di un dato spazio affine $\mathbb{A}$, se la loro intersezione è non vuota, allora essa risulta un sottospazio affine, congiacitura data dalle intersezioni delle giaciture della famiglia.

La situazione è, quindi, analoga all'intersezione di una famiglia di sottospazi vettoriali, con la differenza che sottospazi vettoriali si intersecano sempre almeno nel vettore nullo.

Proposizione 1.2.1. *Sia $\{S_i\}_{i\in I}$ una famiglia arbitraria di sottospazi affini di $\mathbb{A}$, dove I è un insieme arbitrario di indici, e siano $\{W_i\}_{i\in I}$ le relative giaciture.*

Allora per $\bigcap_{i\in I} S_i$ si hanno due casi:

1. *$\bigcap_{i\in I} S_i = \emptyset$, oppure*
2. *$\bigcap_{i\in I} S_i = S \neq \emptyset$, con $S \subset \mathbb{A}$ sottospazio affine di giacitura $W = \bigcap_{i\in I} W_i$.*

Dimostrazione. Se $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \emptyset$, sia $Q \in \bigcap_{i\in I} S_i$; allora il sottospazio affine S passante per Q e con giacitura $W \bigcap_{i\in I} W_i$ verifica per costruzione

$$S \subseteq \bigcap_{i\in I} S_i.$$

Per l'inclusione opposta, sia $P \in \bigcap_{i\in I} S_i$, $P \neq Q$; allora il vettore $\overrightarrow{QP} \in W_i$ per ogni $i \in I$, quindi $\overrightarrow{QP} \in W$ e $\bigcap_{i\in I} S_i \subseteq S$. □

Come conseguenza abbiamo la cosiddetta Formula di Grassmann affine:

Corollario 1.2.2 (Formula di Grassmann per sottospazi affini)**.** *Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}$ due sottospazi affini di uno spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione finita $\dim \mathbb{A} = n$.*

Se $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, allora

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - n, \tag{1.2.1}$$

dove $L(S_1, S_2)$ indica il più piccolo sottospazio affine contenente $S_1 \cup S_2$.

Vediamo ora un criterio che ci permette di dire quando due sottospazi affini si intersecano.

Proposizione 1.2.3. *Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}$ due sottospazi affini con giaciture $W_1, W_2 \subset V$. Allora si ha*

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \iff \forall Q_1 \in S_1, \forall Q_2 \in S_2, \textit{si ha } \overrightarrow{Q_1Q_2} \in W_1 + W_2.$$

Dimostrazione. Supponiamo $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, e sia $P \in S_1 \cap S_2$. Scelti $Q_1 \in S_1$ e $Q_2 \in S_2$ arbitrari, si ha

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1P} + \overrightarrow{PQ_2} = w_1 + w_2,$$

con $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$.

Viceversa, se per ogni coppia di punti $Q_1 \in S_1$ e $Q_2 \in S_2$ si ha $\overrightarrow{Q_1Q_2} \in W_1 + W_2$, allora esistono due vettori $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tali che

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = w_1 + w_2.$$

Per il primo assioma SA1 di spazio affine, esiste un unico $P \in \mathbb{A}$ tale che

$$\overrightarrow{Q_1P} = w_1;$$

siccome $w_1 \in W_1$, che è la giacitura di S_1, si ha $P \in S_1$. Inoltre, possiamo scrivere

$$w_1 + w_2 = \overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1P} + \overrightarrow{PQ_2} = w_1 + \overrightarrow{PQ_2},$$

da cui troviamo che $w_2 = \overrightarrow{PQ_2}$ e quindi si ha anche $P \in S_2$.

□

1.3 Sottospazi affini generati da punti

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V. e siano $T_0, \cdots, T_m \in \mathbb{A}$ dei punti distinti.

Definizione 1.3.1. Indichiamo con

$$L(T_0, \ldots, L_m) \subseteq \mathbb{A}$$

il più piccolo sottospazio affine contenente i punti $T_0, \cdots, T_m$, e viene detto *sottospazio affine generato da* $T_0, \cdots, T_m$.

Il sottospazio $L(T_0, \ldots, L_m)$ *si può ottenere come intersezione di tutti i sottospazi affini contenenti* $\{T_0, \ldots, T_m\}$.

Proposizione 1.3.2. *Dati* $T_0, \ldots, T_m \in \mathbb{A}$, *il sottospazio affine* $L(T_=, dots, L_m)$ *è determinato da* T_0 *e dalla giacitura*

$$W = Span(\overrightarrow{T_0T_1}, \overrightarrow{T_0T_2}, \ldots, \overrightarrow{T_0T_m}).$$

In particolare si ha

$$\dim L(T_0, \ldots, L_m) = \dim W \leq m.$$

Dimostrazione. Per definizione di sottospazio affine, i vettori $\overrightarrow{T_0T_i}$ devono appartenere alla giacitura di $L(T_0, \ldots, L_m)$, quindi la giacitura di ogni sottospazio affine che lo contiene contiene W. □

Osservazione 1.3.3. Per determinare $L(T_0, \ldots, L_m)$ possiamo fissare un punto qualsiasi T_i invece di T_0, e allora la giacitura sarà data da

$$W = \mathsf{Span}(\overrightarrow{T_iT_1}, \overrightarrow{T_iT_2}, \ldots, \overrightarrow{T_iT_m}).$$

Definizione 1.3.4. Se $\dim L(T_0, \ldots, L_m) = 1$, allora i punti $T_0, \ldots, T_m$ si dicono *allineati.*

Definizione 1.3.5. Quando $\dim L(T_0, \ldots, L_m) = m$, cioè la massima possibile, allora i punti si dicono *affinemente indipendenti.*

Osservazione 1.3.6. Se T_0, T_1 sono due punti distinti, allora $\dim L(T_0, T_1) = 1$, cioè per due punti in uno spazio $\mathbb{A}$ qualsiasi passa sempre una retta. Abbiamo ritrovato così il primo postulato della Geometria Euclidea.

Possiamo anche affermare che tale retta è unica, in quanto abbiamo visto nelle sezioni precedenti che due rette distinte si intersecano al più in un punto.

Osservazione 1.3.7. Per tre punti non allineati T_0, T_1, T_2 passa un unico piano affine.

Infatti, in questo caso i vettori $\overrightarrow{T_0T_1}$ e $\overrightarrow{T_0T_2}$ risultano non proporzionali, quindi linearmente indipendenti, e $\dim L(T_0, T_1, T_2) = 2$.

Terminiamo con il seguente.

Proposizione 1.3.8. *Dati un sottospazio affine $S \subset \mathbb{A}$ e un punto $P \in \mathbb{A}$, esiste un unico sottospazio affine $S' \subset \mathbb{A}$ tale che*

$$P \in S', \qquad \dim S = \dim S', \qquad S' \| S.$$

Dimostrazione. L'enunciato segue dal fatto che S' è determinato da P e dal fatto di avere la stessa giacitura W_S di S. □

Osservazione 1.3.9. Se $\dim S = 1$, l'enunciato appena visto si traduce nel quinto postulato di Euclide, sull'esistenza di un'unica retta parallela a una retta data e passante per un punto assegnato.

1.4 Parallelismo, incidenza e sghembità

Definizione 1.4.1. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V, e siano $S_1 \subseteq \mathbb{A}$, $S_2 \subseteq \mathbb{A}$ due sottospazi affini di giaciture W_1 e W_2 rispettivamente.

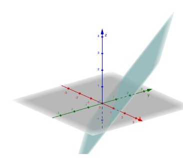
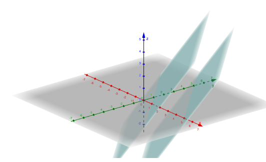
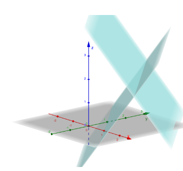
- S_1 e S_2 si dicono *paralleli*, in simboli
$$S_1 \parallel S_2,$$
se
$$W_1 \subseteq W_2 \text{ oppure } W_2 \subseteq W_1;$$
- S_1 e S_2 si dicono *incidenti* se
$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset;$$
- S_1 e S_2 si dicono *sghembi* se non sono nè paralleli nè incidenti.

1.5 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra piani

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni cartesiane:

$$\pi \ : \ ax + by + cz = d, \quad \pi' \ : \ a'x + b'y + c'z = d'.$$

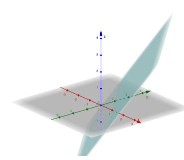
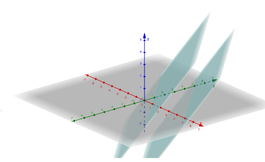
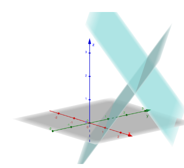
Allora si ha:

$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$	$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$	posizione	
1	1	$\pi \ \parallel \ \pi', \ \pi = \pi'$	
1	2	$\pi \ \parallel \ \pi', \ \pi \cap \pi' = \emptyset$	
2	2	$\pi \ \nparallel \ \pi', \ \dim \ \pi \cap \pi' = 1$	

Consideriamo due piani π, π' nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni parametriche:

$$\pi \; : \; \begin{cases} x = Q_1 + l_1 t_1 + l_2 t_2 \\ y = Q_2 + m_1 t_1 + m_2 t_2 \\ z = Q_3 + n_1 t_1 + n_2 t_2 \end{cases} \qquad \pi' \; : \; \begin{cases} x = T_1 + o_1 s_1 + o_2 s_2 \\ y = T_2 + u_1 s_1 + u_2 s_2 \\ z = T_3 + w_1 s_1 + w_2 s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

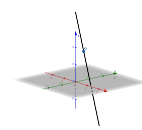
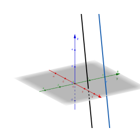
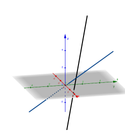
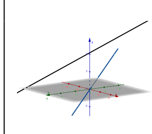
$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & o_1 & o_2 \\ m_1 & m_2 & u_1 & u_2 \\ n_1 & n_2 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$\pi \parallel \pi'$, $\pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$	 
3	$\pi \nparallel \pi'$, $\dim \; \pi \cap \pi' = 1$	

1.6 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo, incidenza e sghembità tra rette nello spazio

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni cartesiane:

$$r \ : \ \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} , \qquad r' \ : \ \begin{cases} ex + fy + gz = h \\ e'x + f'y + g'z = h' \end{cases} .$$

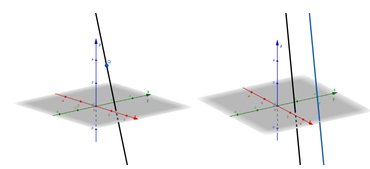
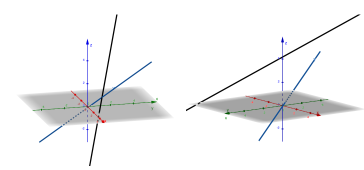
Allora si ha:

$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix}$	$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel s, \ r = s$	
2	3	$r \parallel s, \ r \cap s = \emptyset$	
3	3	$r \nparallel s, \ r \cap s = \{R\}$	
3	4	$r \nparallel s, \ r \cap s = \emptyset$	

Consideriamo due rette r, r' nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni parametriche:

$$r \ : \ \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \qquad r' \ : \ \begin{cases} x = T_1 + os \\ y = T_2 + us \\ z = T_3 + ws \end{cases}$$

Allora si ha:

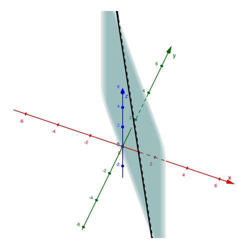
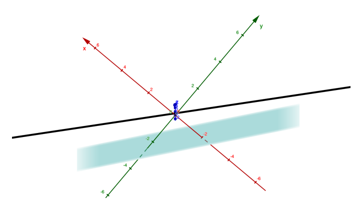
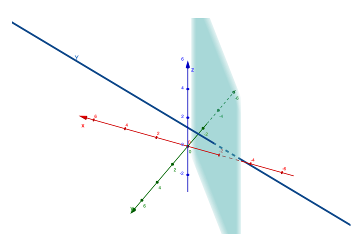
$\text{rk}\begin{pmatrix} l & o \\ m & u \\ n & w \end{pmatrix}$	posizione	
1	$r \parallel r', \ r = r'$ oppure $r \cap r' = \emptyset$	
2	$r \nparallel r', \ r \cap r' = \{R\}$ un punto oppure $r \cap r' = \emptyset$	

1.7 Tabella riassuntiva delle condizioni di parallelismo e incidenza tra una retta e un piano nello spazio

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni cartesiane:

$$r \ : \ \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} , \quad \pi \ : \ ex + fy + gz = h.$$

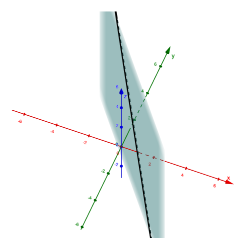
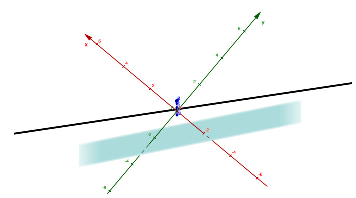
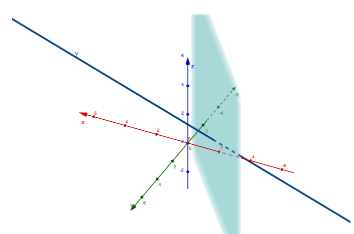
Allora si ha:

$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \end{pmatrix}$	$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$	posizione	
2	2	$r \parallel \pi, \ r \subseteq \pi$	
2	3	$r \parallel \pi, \ r \cap \pi = \emptyset$	
3	3	$r \nparallel \pi, \ r \cap \pi = \{R\}$	

Consideriamo una retta r e un piano π nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ di equazioni parametriche:

$$r\ :\ \begin{cases} x = Q_1 + lt \\ y = Q_2 + mt \\ z = Q_3 + nt \end{cases} \qquad \pi\ :\ \begin{cases} x = T_1 + o_1 s_1 + o_2 s_2 \\ y = T_2 + u_1 s_1 + u_2 s_2 \\ z = T_3 + w_1 s_1 + w_2 s_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} l & o_1 & o_2 \\ m & u_1 & u_2 \\ n & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$	posizione	
2	$r \parallel \pi,\ r \subseteq \pi$ oppure $r \cap \pi = \emptyset$	 
3	$r \nparallel \pi,\ r \cap \pi = \{R\}$ un punto	

1.8 Fasci di iperpiani

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, di dimensione finita n.

Ricordiamo che un iperpiano affine H in $\mathbb{A}$ è, per definizione, un sottospazio affine di dimensione $\dim H = \dim \mathbb{A} - 1$.

Definizione 1.8.1. Siano $H, H' \subset \mathbb{A}$ due iperpiani affini, distinti, di equazioni cartesiane

$$H:\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \qquad H':\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d = 0.$$

Si dice *fascio di iperpiani generato da H e H'* la famiglia Λ di iperpiani di $\mathbb{A}$ il cui generico iperiano ha equazione cartesiana

$$\Lambda : \qquad \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + \mu(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0,$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sono due parametri liberi.

Osservazione 1.8.2. Siccome un'equazione cartesiana di un iperpiano è definita a meno di un fattore di proporzionalità, possiamo considerare due sottofamiglie di Λ, dipendenti da un unico parametro $t \in \mathbb{K}$, così definite:

- se $\lambda \neq 0$, il generico piano ha anche equazione

  $$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + \frac{\lambda}{\mu}(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0.$$

  Ponendo $t := \frac{\lambda}{\mu}$, il generico piano ha equazione $(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + t(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0$. Osserviamo che in questa famiglia manca un unico piano di Λ, quello relativo a $\lambda = 0$, che corrisponde al piano H'.

- se $\mu \neq 0$, il generico piano ha anche equazione

  $$\frac{\mu}{\lambda}(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + (c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0.$$

  Ponendo $t := \frac{\mu}{\lambda}$, il generico piano ha equazione $t(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0) + (c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d) = 0$. Osserviamo che in questa famiglia manca un unico piano di Λ, quello relativo a $\mu = 0$, che corrisponde al piano H.

Vediamo ora come si intersecano gli iperpiani appartenenti a un fascio.

Proposizione 1.8.3. *Siano $H, H' \subset \mathbb{A}$ due iperpiani distinti. Allora si hanno due casi:*

1. *$H \parallel H'$; in questo caso $H \cap H' = \emptyset$;*
2. *$\dim H \cap H' = \dim \mathbb{A} - 2 = n - 2$.*

Dimostrazione. Se $H \parallel H'$ sappiamo dalla teoria generale che i due iperpiani non si intersecano.

Supponiamo quindi $H \not\parallel H'$ e siano

$$H : \; a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \qquad H' : \; c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d = 0.$$

delle loro equazioni cartesiane. Per la condizione di non parallelismo, le loro giaciture sono diverse, quindi il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0 \end{cases}$$

ha la matrice dei coefficienti A di rango 2. Ciò implica che anche la matrice completa associata al sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d = 0 \end{cases}$$

ha rango 2, e per il Teorema di Rouché - Capelli, l'insieme delle soluzioni corrisponde a un sottospazio affine di dimensione $n - \mathrm{rg}A = n - 2$. □

Proposizione 1.8.4. *Siano $H, H' \subset \mathbb{A}$ due iperpiani distinti, sia $\dim \mathbb{A} = n$, e sia Λ il fascio di iperpiani generato da H e H'. Allora si ha:*

1. *se $H \parallel H'$, ogni iperpiano $M \in \Lambda$ soddisfa*

$$M \parallel H.$$

   Un tale fascio si chiama fascio improprio.

   Inoltre, se un iperpiano $L \parallel H$, allora $L \in \Lambda$.

2. *Se $S = H \cap H'$ con $\dim S = n - 2$, allora per ogni $M \in \Lambda$ si ha*

$$M \supset S.$$

   Un tale fascio si chiama fascio proprio.

   Inoltre, ogni iperpiano $L \supset S$ verifica $L \in \Lambda$.

Dimostrazione. 1. Se $\parallel H'$, possiamo scrivere le equazioni cartesiane dei due iperpiani nella forma

$$H: \ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \qquad H': \ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d = 0, \quad b \neq d.$$

Il generico iperpiano di Λ ha dunque equazione

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b) + \mu(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d) = 0,$$

quindi

$$(\lambda+\mu)(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)+\lambda b+\mu d=0,$$

e vediamo che la parte omogenea dell'equazione è proporzionale alla parte omogenea dell'equazione di H, pertanto hanno la stessa giacitura.

Infine, se L è un iperpiano parallelo ad H, possiamo scrivere una sua equazione cartesiana nella forma

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+k=0,$$

per un opportuno $k\in\mathbb{K}$. Se poniamo (λ,μ) la coppia che soddisfa

$$\lambda+\mu=1, \lambda b+\mu d=k,$$

vediamo che L appartiene a Λ.

2. È chiaro che tutti i punti le cui coordinate sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b=0,\\ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n+d=0\end{cases}$$

annullano anche l'equazione del generico iperpiano del fascio.

Infine, se $L\supset S$ è un iperpiano arbitrario contenente S, fissiamo un punto $Q\in L\setminus S$, e fissiamo $n-1$ punti affinemente indipendenti di S:

$$Q_1,\cdots,Q_{n-1}.$$

Osserviamo che per costruzione

$$Q,Q_1,\cdots,Q_{n-1}$$

sono ora n punti affinemente indipendenti.

Consideriamo il generico iperpiano di Λ e imponiamo il passaggio per $Q(q_1,\cdots,q_n)$; otteniamo la relazione

$$\lambda(a_1q_1+a_2q_2+\cdots+a_nq_n+b)+\mu(c_1q_1+c_2q_2+\cdots+c_nq_n+d)=0.$$

Siccome $Q\notin H\cap H'$, le sue coordinate non annullano entrambe le loro equazioni; l'iperpiano del fascio passante per Q è ottenuto quindi in corrispondenza della coppia

$$(\bar\lambda,\bar\mu)=(-(c_1q_1+c_2q_2+\cdots+c_nq_n+d),(a_1q_1+a_2q_2+\cdots+a_nq_n+b)),$$

o di una qualunque coppia proporzionale a questa. Tale iperpiano contiene gli n punti affinemente indipendenti $Q,Q_1,\cdots,Q_{n-1}$, è quindi univocamente determinato e coincide con L.

$\square$

Capitolo 2

Applicazioni affini e affinità

Avendo introdotto la struttura geometrica di spazio affine, consideriamo ora le applicazioni tra spazi affini che conservano la struttura, ovvero che mandano sottospazi affini in sottospazio affini (non necessariamente della stessa dimensione). Queste mappe verranno chiamate applicazioni (o trasformzioni) affini.

Definizione 2.0.1. Siano V e V' due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ due spazi affini, rispettivamente su V e V'.

Diciamo che una applicazione

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$$

è una *applicazione affine* se esiste un'applicazione $\mathbb{K}$-lineare

$$\varphi : V \to V',$$

detta *parte lineare* di f, tale che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$, vale

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}).$$

In particolare, se f è biettiva, anche φ è biettiva, quindi è un isomorfismo di spazi vettoriali, e diremo che f è un' *affinità* o un *isomorfismo affine*. In tal caso, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ si dicono *isomorfi* e scriveremo

$$\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'.$$

Osservazione 2.0.2. Dalle definizione è chiaro che data una trasformazione affine f, la parte lineare φ è univocamente determinata.

Osservazione 2.0.3. Lo spazio affine standard $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ si può immergere come sottospazio affine in $\mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ per ogni $m > n$, ad esempio mediante l'applicazione affine iniettiva

$$j \ : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$$

definita da

$$j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Nel caso particolare $n = 1$ e $m = 2$, si ottiene l'inclusione della retta affine $\mathbb{A}^1$ nel piano $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ mediante $x \mapsto (x, 0) \, \forall \, x \in \mathbb{A}^1$, cioè si ottiene la retta rappresentata dall'asse x.

Osservazione 2.0.4. Un sistema di equazioni parametriche per un sottospazio affine $S \subset \mathbb{A}^n$ di dimensione k determina un'applicazione affine iniettiva *(immersione affine)*

$$f \ : \mathbb{A}^k \to \mathbb{A}^n,$$

con $f(\mathbb{A}^k) = S$.

Infatti, se S ha equazioni

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \cdots + t_k w_{1k} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \cdots + t_k w_{2k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \cdots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

l'applicazione

$$f(t_1, \cdots, t_k) = (q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \cdots + t_k w_{1k}, \cdots, q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \cdots + t_k w_{nk})$$

ha come parte lineare l'applicazione data dalla moltiplicazione per la matrice

$$A = (w_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k}.$$

Notazione 2.0.5. Indicheremo con $\mathcal{L}(V, V')$, oppure con $\mathrm{Hom}(V, V')$, lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali V e V'.

Lemma 2.0.6. *Fissati due punti arbitrari $O \in \mathbb{A}$ e $O' \in \mathbb{A}'$, per ogni $\varphi \in \mathcal{L}(V, V')$ esiste un'unica trasformazione affine*

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$$

tale che $f(O) = O'$ e con parte lineare φ.

Dimostrazione. Per ogni $P \in \mathbb{A}$, consideriamo il vettore $\varphi(\overrightarrow{OP}) \in V'$, e poniamo $f(P) \in \mathbb{A}'$ uguale all'unico punto tale che
$$\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'f(P)}.$$
In particolare, abbiamo che
$$\varphi(\overrightarrow{OO}) = \varphi(0) = 0 = \overrightarrow{O'f(O)},$$
quindi $f(O) = O'$.

L'applicazione f risulta una trasformazione affine per costruzione, ed è unica. Infatti, se $g : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$è un'altra trasformazione affine tale che
$$g(O) = O',$$
con parte lineare φ, si ha per ogni $P \in \mathbb{A}$
$$\overrightarrow{O'g(P)} = \overrightarrow{g(O)\,g(P)} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'f(P)},$$
e per l'assioma (SA1) si ha
$$g(P) = f(P).$$
□

2.0.1 Isomorfismi affini

Analizziamo ora nel dettaglio l'insieme degli isomorfismi affini.

Proposizione 2.0.7. *Se $\mathbb{A}, \mathbb{A}', \mathbb{A}''$ sono spazi affini, allora valgono:*

i) l'applicazione identica $id_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ (la cui parte lineare è $\varphi = id_V$) è un isomorfismo affine;

ii) se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è un isomorfismo allora anche $f^{-1} : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ è un isomorfismo;

iii) se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ e $g : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ sono applicazioni affini, allora anche l'applicazione $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}''$ è affine, la cui parte lineare è composizione delle due parti lineari.

In particolare, la composizione di isomorfismi affini è anch'essa un isomorfismo.

Dimostrazione. Il punto $i)$ è immediato.

$ii)$ Sia $\varphi : V \to V'$ la parte lineare di f. Affermiamo che φ^{-1} è la parte lineare di f^{-1}, cioè che per ogni coppia $P', Q' \in \mathbb{A}'$, vale
$$\overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{P'Q'}).$$

Consideriamo i punti $f^{-1}(Q'), f^{-1}(P') \in \mathbb{A}$. Essendo f una applicazione affine si ha

$$\varphi(\overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')}) = \overrightarrow{f(f^{-1}(P'))\; f(f^{-1}(Q'))} = \overrightarrow{P'Q'}$$

Applicando φ^{-1} ad ambo i membri, si ottiene la tesi.

$iii)$: Bisogna provare che, comunque scelte applicazioni affini f, g, poste φ e ψ le rispettive parti lineari, allora laparte lineare di $f \circ g$ è $\varphi \circ \psi$.

Per la Definizione, questo equivale a provare che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$ si verifica

$$\overrightarrow{(f \circ g)(P)\; (f \circ g)(Q)} = (\varphi \circ \psi)(\overrightarrow{PQ}).$$

Poiché f ha come parte lineare φ e g ha come parte lineare ψ, si ottengono le uguaglianze

$$\overrightarrow{f(g(P))\; f(g(Q))} = \varphi(\overrightarrow{g(P)\; g(Q)}) = \varphi(\psi(\overrightarrow{PQ})),$$

come si voleva. $\square$

Esempio 2.0.8. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V e sia $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$ una base di V. Scelto $O \in \mathbb{A}$, si consideri il riferimento affine $\Sigma = (O; v_1, \dots, v_n)$.

Consideriamo l'applicazione

$$f_{\mathcal{B}} :\ \mathbb{A} \to \mathbb{A}^n_K \quad \text{data da} \quad P(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n),$$

che ad ogni punto associa la n-upla delle coordinate rispetto a Σ, è un isomorfismo affine con parte lineare

$$\varphi_{\mathcal{B}} :\ V \to \mathbb{K}^n, \quad v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Infatti, dati P di coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ e Q di coordinate $(y_1, \dots, y_n)$ in $\mathbb{A}$, per definizione si ha che

$$\overrightarrow{OP} = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OQ} = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n.$$

Inoltre vale

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (y_1 - x_1)v_1 + \cdots + (y_n - x_n)v_n.$$

Pertanto, $\varphi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ}) = (y_1 - x_1, \dots y_n - x_n) \in \mathbb{K}^n$.

D'altro canto, $f(P) = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(Q) = (y_1, \dots, y_n)$, e

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{Of(Q)} - \overrightarrow{Of(P)} = (y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n) = (y_1 - x_1, \dots y_n - x_n) = \varphi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ})$$

e questo significa che $f_{\mathcal{B}}$ è una applicazione affine e $\varphi_{\mathcal{B}}$ è la sua parte lineare.

Infine, si verifica facilmente che $\varphi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo.

Osservazione 2.0.9. Dall'esempio precedente segue che ogni spazio affine di dimensione n su $\mathbb{K}$ è isomorfo (non canonicamente, l'isomorfismo dipende dalla scelta di una base) ad $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Definizione 2.0.10. Un isomorfismo affine di uno spazio affine $\mathbb{A}$ in sé si dice *affinità* di $\mathbb{A}$.
In questo caso la parte lineare di f è un automorfismo φ di V, cioè $\varphi \in GL(V)$.

2.0.2 Gruppi di trasformazioni affini

Dalla Proposizione 2.0.7 segue facilmente il seguente fatto.

Proposizione 2.0.11. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine. Allora l'insieme*

$$\mathit{Aff}(\mathbb{A}) := \{\textit{affinità di } \mathbb{A}\}$$

è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

Osservazione 2.0.12. È facile verificare che Aff($\mathbb{A}$) non è un gruppo abeliano. Questo segue, ad esempio, dalla non abelità del gruppo GL(V)

Definizione 2.0.13. I sottogruppi di Aff($\mathbb{A}$) si dicono *gruppi di trasformazioni affini*.

Vediamo ora alcuni gruppi di trasformazioni affini e come un'affinità qualunque si può fattorizzare come composizione di due affinità più semplici.
Cominciamo con il caratterizzare le traslazioni.

Teorema 2.0.14. *Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V allora le traslazioni di $\mathbb{A}$ sono tutte e sole le affinità aventi come parte lineare id_V.*

Dimostrazione. Si consideri la traslazione t_v lungo v, dove $v \in V$:

$$t_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad P \mapsto t_v(P) = Q \ : \ \overrightarrow{PQ} = v.$$

Si ha

$$\overrightarrow{t_v(P)t_v(P')} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} =$$
$$-v + \overrightarrow{PP'} + v = \overrightarrow{PP'}.$$

Pertanto t_v è una applicazione affine di parte lineare $\varphi = id_V$. Abbiamo visto in precedenza che t_v è biunivoca e quindi, essendo φ un isomorfismo di spazi vettoriali, è un isomorfismo affine. Quindi t_v è un'affinità.

Viceversa, se $f: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ è un'affinità e la sua parte lineare è id_V, allora per definizione, comunque scelti $P, Q \in \mathbb{A}$:
$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{PQ}.$$
Pertanto, posto
$$v := \overrightarrow{Pf(P)}$$
si ha per ogni $Q \in \mathbb{A}$
$$\overrightarrow{Qf(Q)} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{Pf(P)} + \overrightarrow{f(P)f(Q)} = -\overrightarrow{PQ} + v + \overrightarrow{PQ} = v.$$
□

Osservazione 2.0.15. Abbiamo visto che l'insieme di tutte le traslazioni di uno spazio affine $\mathbb{A}$ è un gruppo rispetto alla compisizione; risulta quindi anche un sottogruppo di $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque un gruppo di trasformazioni affini, detto *sottogruppo delle traslazioni* e denotato con $T(\mathbb{A})$.

Osservazione 2.0.16. Se si fissa un punto $O \in \mathbb{A}$, si verifica facilmente che l'insieme delle affinità che lo fissano
$$\mathrm{Aff}_O(\mathbb{A}) := \{f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \mid f(O) = O\}$$
è un sottogruppo di $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque è un altro gruppo di trasformazioni affini.

Dalla Proposizione 2.0.7 possiamo dedurre il seguente risultato.

Lemma 2.0.17. *L'applicazione*
$$\Phi_O : \mathit{Aff}_O(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V) \tag{2.0.1}$$
che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un isomorfismo di gruppi, in cui le operazioni sono la composizione di applicazioni.

Più in generale, possiamo definire l'analoga applicazione riguardo ad una qualunque affinità; in altri termini, estendiamo Φ_O a tutto $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$.

Teorema 2.0.18. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V. Allora l'applicazione*
$$\Phi : \mathit{Aff}(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V)$$
che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un omomorfismo di gruppi.

Inoltre $\ker(\Phi) = T(\mathbb{A})$*, che è dunque un sottogruppo normale di Aff*$(\mathbb{A})$.

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato segue direttamente dalla Proposizione 2.0.7.

Inoltre $\ker(\Phi)$ è costituito da tutte e sole le affinità con parte lineare identica e tale insieme è esattamente $T(\mathbb{A})$ per il Teorema 2.0.14. $\square$

Un'altra classe importante di affinità sono le *similitudini*, che risultano associate a applicazione lineari date da *omotetie* e che richiamiamo brevemente.

Definizione 2.0.19. Se V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $c \in \mathbb{K}$, si dice *omotetia di rapporto c* l'applicazione lineare

$$\omega_c : V \to V \quad \omega_c(v) = cv, \ \forall v \in V.$$

L'applicazione ω_c è un isomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali se e solo se $c \neq 0$, altrimenti è l'omomorfismo nullo, e la sua matrice associata in una base qualunque $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\omega_c) = c\mathbb{I}_n,$$

dove $n = \dim(V)$.

La nozione di omotetia può essere riletta nell'ambito della Geometria Affine attraverso l'isomorfismo Φ_O di (2.0.1) come segue.

Definizione 2.0.20. Con le notazioni precedenti, se $c \in \mathbb{K}^*$ e $O \in \mathbb{A}$, diciamo *omotetia di rapporto c e centro O* l'affinità

$$\omega_{c,O} := \Phi_O^{-1}(\omega_c)$$

cioè

$$\omega_{c,O} : \mathbb{A} \to \mathbb{A} \quad \text{dove} \quad \overrightarrow{O\,\omega_{c,O}(P)} = c\overrightarrow{OP}.$$

In particolare, se $c = -1$, l'affinità $\omega_{-1,O}$ si dice *simmetria di centro O* e si denota anche con σ_O.

Vediamo ora un risultato fondamentale sulle affinità, che ci permette di fattorizzare ogni affinità come composizione di una traslazione e di una affinità con un punto fisso. Più precisamente:

Teorema 2.0.21 (Fattorizzazione di un'affinità). *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V e sia $O \in \mathbb{A}$ un punto fissato. Allora per ogni $f \in Aff(\mathbb{A})$*

i) esistono e sono unici $v \in V$ e $g \in Aff_O(\mathbb{A})$ tali che $f = g \circ t_v$;

ii) esistono e sono unici $w \in V$ e $h \in Aff_O(\mathbb{A})$ tali che $f = t_w \circ h$.

Dimostrazione. i) Definiamo il vettore

$$v := \overrightarrow{f^{-1}(O)\,O}$$

e consideriamo la corrispondente traslazione t_v. Questa è biunivoca e ha per inversa $t_v^{-1} = t_{-v}$. Poiché $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ è un gruppo, la composizione di affinità è ancora un'affinità; pertanto definiamo l'affinità

$$g := f \circ t_v^{-1}.$$

Resta solo da provare che $g \in \mathrm{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $g(O) = O$. Dalla definizione

$$g(O) = f(t_v^{-1}(O)) = f(t_{-v}(O)) = f(f^{-1}(O)) = O.$$

Segue che $f = g \circ t_v$.

ii) Definiamo il vettore $w := \overrightarrow{Of(O)}$ e consideriamo la corrispondente traslazione t_w. Come prima, possiamo definire l'affinità

$$h := t_w^{-1} \circ f.$$

Resta solo da provare che $h \in \mathrm{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $h(O) = O$. Dalla definizione

$$h(O) = t_w^{-1}(f(O)) = t_w^{-1}(t_w(O)) = O,$$

come volevamo. $\square$

2.1 Rappresentazioni numeriche di affinità

Vogliamo ora determinare una rappresentazione di un'affinità in termini delle coordinate di un generico punto.

2.1.1 Affinità di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$

Per semplicità incominciamo con lo spazio affine standard $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Sia $f : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un'affinità con parte lineare φ. Sia

$$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\varphi) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

la matrice associata a φ nella base canonica $\mathcal{E}$, sia $O = (0, \cdots, 0)$ e poniamo

$$C := f(O).$$

Dato $P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ arbitrario, per definizione di affinità si ha

$$\overrightarrow{Cf(P)} = \overrightarrow{f(O)f(P)} = f(P) - f(O) = \varphi(P - O) = A \cdot (P - O) = A \cdot {}^tP.$$

Possiamo quindi scrivere

$${}^tf(P) = {}^tC + A \cdot {}^tP. \tag{2.1.1}$$

Viceversa, per ogni $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ e per ogni $C \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, l'applicazione

$$f_{A,C} : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}, \quad f_{A,C}(P) = {}^tC + A \cdot {}^tP$$

è un'affinità.

Infatti, si ha

$$\overrightarrow{f_{A,C}(P)f_{A,C}(Q)} = f_{A,C}(Q) - f_{A,C}(P) = {}^tC + A \cdot {}^tQ - ({}^tC + A \cdot {}^tP) = A \cdot {}^t(Q - P),$$

quindi $f_{A,C}$ è un affinità con parte lineare data dalla moltiplicazione per la matrice A.

Come conseguenza abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 2.1.1. *Il gruppo delle affinità di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ ha per elementi:*

$$\mathit{Aff}_n(\mathbb{K}) = \{f_{A,C} \ : \ A \in GL_n(\mathbb{K}), \ C \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}\}.$$

Osservazione 2.1.2. In particolare le traslazioni in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ si rappresentano come

$$t_C(P) = {}^tC + {}^tP$$

2.1.2 Affinità di uno spazio affine arbitrario

Il caso generale è perfettamente analogo al caso $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$; fissiamo un riferimento affine

$$(O, v_1, \cdot, v_n).$$

Teorema 2.1.3. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V e sia $(O, v_1, \cdot, v_n)$ un riferimento affine. Allora ofni affinità f con automorfismo associato φ si esprime nella forma*

$$f(P(x_1, \cdots, x_n)) = Q(y_1, \cdots, y_n),$$

con

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tC + A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

e $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$.

Viceversa, ogni applicazione del tipo (2.1.2) *è un affinità di $\mathbb{A}$.*

Corollario 2.1.4. *Fissato un riferimento affine* $(O, v_1, \cdots, v_n)$ *di* $\mathbb{A}$*, l'applicazione*

$$\mathit{Aff}(\mathbb{A}) \to \mathit{Aff}_n(\mathbb{K}), \quad f \mapsto f_{A,C} \textit{ data da } (2.1.2)$$

è un isomorfismo di gruppi.

Osservazione 2.1.5. Si può dare una forma ancora più compatta dell'equazione (2.1.2) di un'affinità.

Osserviamo che i dati della matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ e del vettore $C \in \mathbb{K}^n$ possono essere inseriti in una matrice $(n+1) \times (n+1)$ nei seguenti due modi.

$I)$ Siano $\overline{X} := {}^t(1, x_1, \ldots, x_n)$ e $\overline{Y} := {}^t(1, y_1, \ldots, y_n)$ e sia

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ c_n & & & \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione (2.1.2)è equivalente a

$$\overline{Y} = Q\,\overline{X}. \tag{2.1.3}$$

$II)$ Siano $\widetilde{X} := {}^t(x_1, \ldots, x_n, 1)$ e $\widetilde{Y} := {}^t(y_1, \ldots, y_n, 1)$ e sia

$$\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} & & & c_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione (2.1.2) è equivalente a

$$\widetilde{Y} = \widetilde{Q}\,\widetilde{X}. \tag{2.1.4}$$

2.2 Proprietà affini

Intendiamo con *proprietà affini* quelle proprietà (nozioni, relazioni, ecc.) che vengono mantenute attraverso un'affinità. In sintesi, in questo paragrafo vedremo che si conservano per affinità:

- essere un sottospazio affine;

- la dimensione di un sottospazio affine;
- essere un insieme di punti allineati;
- essere sottospazi paralleli.

In questa sezione $\mathbb{A}$ denota uno spazio affine su un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V con $n = \dim(\mathbb{A}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Proposizione 2.2.1. *Sia $f \in Aff(\mathbb{A})$ di parte lineare $\varphi \in GL(V)$. Se S è un sottospazio affine di giacitura W e passante per il punto P, allora $f(S)$ è il sottospazio affine di giacitura $\varphi(W)$ e passante per il punto $f(P)$.*

Dimostrazione. " $\subseteq$ " Sia $Q \in S$ cioè $\overrightarrow{PQ} = w$ per un opportuno $w \in W$. Dalla definizione di applicazione affine si ha

$$\varphi(w) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} \in \varphi(W).$$

" $\supseteq$ " Sia R tale che $\overrightarrow{f(P)R} \in \varphi(W)$, quindi esiste $w \in W$ tale che

$$\overrightarrow{f(P)R} = \varphi(w).$$

Per l'assioma (SA1) esiste un unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $w = \overrightarrow{PQ}$. Quindi $\varphi(w) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$. In conclusione

$$\varphi(w) = \overrightarrow{f(P)R} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

quindi $R \in f(S)$. □

Corollario 2.2.2. *Se $f \in Aff(\mathbb{A})$ e $S \subseteq \mathbb{A}$ è un sottospazio affine allora*

$$\dim f(S) = \dim S.$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione precedente si ha che la giacitura di S e quella di $f(S)$ sono sottospazi di V che risultano isomorfi tramite la parte lineare di f. □

Corollario 2.2.3. *Se $f \in Aff(\mathbb{A})$ e $\{P_1, \dots, P_m\}$ è un un insieme di punti distinti allineati, allora anche*

$$\{f(P_1), \dots, f(P_m)\}$$

è un un insieme di punti distinti allineati.

Diremo, sinteticamente, che ogni affinità è una collineazione.

Dimostrazione. Sia L la retta contenente $P_1, \dots, P_m$. Poiché un'applicazione mantiene le inclusioni, si ha che $f(L)$ contiene $f(P_1), \dots, f(P_m)$. Dalla Proposizione proaff si ha che $f(L)$ è un sottospazio affine e, dal Corollario proaff2, segue in particolare che $\dim(f(L)) = 1$. $\square$

Corollario 2.2.4. *Se $f \in Aff(\mathbb{A})$ e $S, S' \subseteq \mathbb{A}$ sono due sottospazi affini paralleli allora $f(S)$ e $f(S')$ sono sottospazi affini paralleli.*

Dimostrazione. Se S e S' hanno giaciture, rispettivamente, W e W', per ipotesi si ha $W \subseteq W'$ (o $W \supseteq W'$). Quindi $\varphi(W) \subseteq \varphi(W')$ (o $\varphi(W) \supseteq \varphi(W')$). D'altro canto, dalla Proposizione 2.2.1, segue che la giacitura di $f(S)$ è $\varphi(W)$ e quella di $f(S')$ è $\varphi(W')$ e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Definizione 2.2.5. Due sottoinsiemi X e X' di $\mathbb{A}$ si dicono *affinemente equivalenti* se esiste un'affinità f di $\mathbb{A}$ tale che $f(X) = X'$.

Abbiamo visto nel Corollario 2.2.2 che due sottospazi affinemente equivalenti hanno la stessa dimensione. Ora vediamo che vale anche il viceversa.

Proposizione 2.2.6. *Siano S e S' sottospazi affini di $\mathbb{A}$ con $\dim(S) = \dim(S')$. Allora esiste $f \in Aff(\mathbb{A})$ tale che $f(S) = S'$.*

Dimostrazione. Siano W e W' le giaciture si S e S'. Siccome per ipotesi si ha $\dim W = \dim W'$, esite un isomorfismo lineare $\varphi : V \to V$ tale che $\varphi(W) = W'$; infatti, sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ è una base di W, consideriamo un suo completamento arbitrario a una base $\{w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ di V. Fissiamo analogamente una base $\{w'_1 \dots, w'_k\}$ di W', e sia $\{w'_1, \dots, w'_k, v'_{k+1}, \dots, v'_n\}$ un completamento arbitrario a una base di V. Allora per il Teorema di determinazione di una applicazione lineare, esiste una unica $\varphi : V \to V$ tale che $\varphi(w_i) = w'_i$ e $\varphi(v_i) = v'_i$. Siccome φ manda una base in una base, essa risulta un isomorfismo.

Se ora fissiamo due punti $Q \in S$ e $Q' \in S'$, allora l'affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ determinata da $f(Q) = Q'$ e con parte lineare φ soddisfa la richiesta dell'enunciato. $\square$

Vedimao ora un Teorema di determinazione di affinità tramite immagine di punti, che si base sull'analogo teorema di determinazione per applicazioni lineari.

Teorema 2.2.7 (Determinazione di un'affinità mediante punti)**.** *Siano $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ e $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ due $(n+1)$-uple di punti di $\mathbb{A}^n$ affinemente indipendenti. Allora esiste un'unica affinità f tale che*

$$f(P_i) = Q_i, \qquad \forall i = 0, \dots, n.$$

In altre parole, tali due $(n+1)$-uple sono affinemente equivalenti e in modo unico (a meno di permutazioni).

Dimostrazione. Per ipotesi gli n vettori $P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_0$ di $\mathbb{K}^n$ sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di $\mathbb{K}^n$. Analogamente lo sono $Q_1 - Q_0, \ldots, Q_n - Q_0$. Pertanto esiste un unico isomorfismo φ di $\mathbb{K}^n$ in sé tale che $\varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Per il Teorema detaff esiste un'unica $f \in \text{Aff}(\mathbb{A}^n)$ avente φ come parte lineare e tale che $f(P_0) = Q_0$. Precisamente (vedi dimostrazione del teorema citato) tale affinità è definita su ogni $P \in \mathbb{A}^n$ come

$$f(P) = Q_0 + \varphi(P - P_0).$$

Dobbiamo verificare che tale affinità verifica le condizioni richieste. Ma, per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ha

$$f(P_i) - f(P_0) = \varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$$

da cui segue $f(P_i) = Q_i - Q_0 + f(P_0) = Q_i$, come volevamo.

Infine, l tale affinità, cioè che, se $g \in \text{Aff}(\mathbb{A}^n)$ e $g(P_i) = Q_i$, per ogni $i = 0, \ldots, n$, allora $g = f$ (traccia: si provi dapprima che g ha la stessa parte lineare di f e si concluda applicando il Teorema detaff). □

2.3 Proiezioni su sottospazi affini

Vogliamo ora definire le proiezioni di uno spazio affine su un sottospazio affine. Ricordiamo prima alcune nozioni di Algebra Lineare.

In uno spazio vettoriale V, due sottospazi U e W si dicono *complementari* se $V = U \oplus W$. Equivalentemente, se ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo unico come $v = u + w$, per opportuni $u \in U$ e $w \in W$.

Inoltre sono definite due applicazioni lineari, dette *proiezioni*,

$$\pi_U : V \to U, \quad \text{data da} \quad v = u + w \mapsto u$$

e

$$\pi_W : V \to W, \quad \text{data da} \quad v = u + w \mapsto w.$$

Vediamo come adattare queste nozioni nella Geometria affine.

Definizione 2.3.1. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale $V = U \oplus W$ e sia S un sottospazio affine di giacitura W. Diciamo *proiezione su S parallela a U* l'applicazione

$$p_W : \mathbb{A} \longrightarrow S, \quad p_W(p) = T_P(U) \cap S,$$

dove $T_P(U)$ è il sottospazio affine passante per P e con giacitura U.

In modo del tutto analogo, dato un sottospazio affine di giacitura U, si definisce la *proiezione p_U su S' parallela a W*.

Lemma 2.3.2. *Nelle ipotesi della Definizione 2.3.1 si ha per ogni $P \in \mathbb{A}$:*

$$\dim T_P(U) \cap S = 0,$$

quindi consiste di un punto.

Dimostrazione. Siccome $W \oplus U = V$, per ogni coppia di punti $Q \in S$ e $R \in T_P(U)$ si ha certamente $\overrightarrow{QR} \in W \oplus U$ quindi $T_P(U) \cap S \neq \emptyset$ per la Proposizione 1.2.3.

Inoltre, dalla Formula di Grassmann affine (1.2.1) abbiamo

$$\dim T_P(U) \cap S = \dim T_P(U) + \dim S - \dim L(T_P(U), S) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 0.$$

$\square$

Esempio 2.3.3. In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, spazio affine su $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$, dove $U = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $W = \text{Span}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, posto S l'asse y di equazione $x = 0$, la proiezione su S parallela a U è

$$p_U(x, y) = y.$$

Se invece poniamo S' l'asse x, la proiezione su S' parallela a W è

$$p_W(x, y) = x.$$

Proposizione 2.3.4. *Con le notazioni precedenti, l'applicazione p_W è un'applicazione affine avente π_W come parte lineare.*

Dimostrazione. Sia $Q \in S$. Osserviamo che per ogni $P \in \mathbb{A}$, se consideriamo il punto $P' = p_W(P)$, abbiamo

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP'} + \overrightarrow{P'P} = w + u,$$

dove $w \in W$ perché $Q, P' \in S$, e $u \in U$ perché $P', P \in T_P(U)$.

Quindi, dati $P, R \in \mathbb{A}$ arbitrari, se consideriamo il vettore $\overrightarrow{p_W(P)p_W(R)} = \overrightarrow{P'R'}$, possiamo scrivere

$$\overrightarrow{P'R'} = \overrightarrow{P'Q} + \overrightarrow{QR'} = w_P - w_R,$$

dove

$$\overrightarrow{QP} = w_P + u_P, \quad \overrightarrow{QR} = w_R + u_R, \quad w_P, w_R \in W, u_P, u_R \in U.$$

L'applicazione φ che a $\overrightarrow{PR}$ associa $\overrightarrow{P'R'}$ opera nel seguente modo:

$$\varphi(\overrightarrow{PR}) = \varphi(w_P - w_R + u_P - u_R) = w_P - w_R,$$

quindi è proprio la proiezione lineare sul sottospazio W. $\square$

Capitolo 3

Spazi affini reali

Se il campo K relativo a uno spazio affine è il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, oltre a tutto quanto visto in precedenza, si danno nozioni e risultati ulteriori, possibili in quanto $\mathbb{R}$ è dotato di una relazione d'ordine che lo rende un *campo ordinato*.

Definizione 3.0.1. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, diremo che $\mathbb{A}$ è uno *spazio affine reale*. In particolare, se $n = \dim(\mathbb{A})$, si può supporre che $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$.

Un primo fatto peculiare di tali spazi è il seguente. Abbiamo menzionato nel paragrafo precedente la nozione di collineazione (cioè di applicazione biunivoca $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che, per ogni retta $L \subset \mathbb{A}$ anche $f(L)$ è una retta) e abbiamo provato che ogni affinità è una collineazione (vedi Corollario hill). Nel caso degli spazi affini reali di dimensione almeno 2 vale anche il viceversa (non proveremo questo risultato).

Introduciamo ora alcune nozioni specifiche degli spazi affini reali e vediamo quali di queste si mantengono per affinità.

D'ora in poi, in questo paragrafo, con $\mathbb{A}$ denoteremo uno spazio affine reale su un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V.

Definizione 3.0.2. La *semiretta di origine* $Q \in \mathbb{A}$ *e direzione* $v \in V \setminus \{0_V\}$ è l'insieme

$$\{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} = tv,\ t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}.$$

Chiaramente tale semiretta è contenuta nella retta passante per Q con giacitora Span(v).

Si prova facilmente che l'immagine per affinità di una semiretta è ancora una semiretta.

Definizione 3.0.3. Diciamo *segmento di estremi* $Q, R \in \mathbb{A}$ l'insieme

$$\overline{QR} := \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} = t(\overrightarrow{QR},\ t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Proposizione 3.0.4. *Sia $f \in Aff(\mathbb{A})$ e $Q, R \in \mathbb{A}$ siano due punti qualunque. Allora*

$$f(\overline{QR}) = \overline{f(Q)f(R)}.$$

In altre parole, l'immagine per affinità di un segmento è ancora un segmento, avente per estremi le immagini degli estremi del segmento di partenza.

Dimostrazione. " $\subseteq$ " Se $P \in \overline{QR}$ allora $\overrightarrow{QP} = \bar{t}\overrightarrow{QR}$ per un opportuno $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $0 \leq \bar{t} \leq 1$. Se φ è la parte lineare di f, si ha

$$\overrightarrow{f(Q)f(P)} = \varphi(\overrightarrow{QP}) = \varphi(\bar{t}\overrightarrow{QR}) = \bar{t}\varphi(\overrightarrow{QR}),$$

quindi $f(P) \in \overline{f(Q)f(R)}$.

" $\supseteq$ " Basta applicare l'inclusione appena dimostrata all'affinità f^{-1} e al segmento di estremi $f(R)$ e $f(Q)$, ottenendo che

$$f^{-1}(\overline{f(Q)f(R)}) \subseteq \overline{f^{-1}(f(Q))f^{-1}(f(R))} = \overline{QR}.$$

Applicando infine f ad ambo i membri si ottiene la tesi. □

Definizione 3.0.5. Si può definire il *punto medio* di un segmento $\overline{QR}$ (anche se il termine non ha alcuna valenza metrica, che assumerà invece negli spazi euclidei!) quel punto M definito da

$$\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$$

La naturale generalizzazione della nozione di segmento a una "dimensione" maggiore è la seguente.

Definizione 3.0.6. Se $A, B, C \in \mathbb{A}$ sono tre punti non allineati, diciamo *triangolo di vertici* A, B, C l'insieme

$$\overline{ABC} := \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC},\ t, s \in \mathbb{R}_+, t + s \leq 1\}$$

dove $\mathbb{R}_+$ denota l'insieme dei numeri reali non negativi.

In modo analogo a quanto visto nella Proposizione 3.0.4, si prova il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 3.0.7. *Se $f \in Aff(\mathbb{A})$ e $A, B, C \in \mathbb{A}$ sono tre punti non allineati, allora*

$$f(\overline{ABC}) = \overline{f(A)f(B)f(C)}.$$

In altre parole, l'immagine per affinità di un triangolo è ancora un triangolo, avente per vertici le immagini dei vertici del triangolo di partenza.

Si possono generalizzare le nozioni di segmento (con 2 estremi) e di triangolo (con 3 vertici) a un oggetto determinato da un insieme (sufficientemente generale) di punti.

Definizione 3.0.8. Dati $A_0, \ldots, A_k \in \mathbb{A}$ punti affinemente indipendenti (dunque necessariamente $k \leq n$), il *k-simplesso* di vertici $A_0, \ldots, A_k$ è l'insieme

$$\Delta_k := \left\{ P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{A_0A_i},\ t_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^{k} t_i \leq 1 \right\}.$$

Un'altra nozione tipica degli spazi affini reali è quella di convessità.

Definizione 3.0.9. Un insieme $X \subseteq \mathbb{A}$ si dice *convesso* se, comunque scelti $A, B \in X$, il segmento di estremi A e B è contenuto in X.

La convessità è una proprietà affine, come vediamo nel seguente risultato.

Teorema 3.0.10. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}$ un insieme convesso e sia $f \in$ Aff$(\mathbb{A})$. Allora $f(X)$ è convesso.*

Dimostrazione. Siano $f(A), f(B) \in f(X)$ due punti qualunque. Vogliamo provare che

$$\overline{f(A)f(B)} \subseteq f(X).$$

Poiché $A, B \in X$ e X è convesso per ipotesi, allora $\overline{AB} \subseteq X$. Pertanto $f(\overline{AB}) \subseteq f(X)$. Ma, per la Proposizione 3.0.4, si ha

$$f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$$

e dunque la tesi. □