

Esercizio 1

Considera un problema di meccanica quantistica unidimensionale con azione

$$S = \int dt \left[\frac{m \dot{q}^2}{2} - V(q) \right] . \quad (1)$$

Nella pittura di Schrödinger per l'evoluzione temporale, dato uno stato $|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}|\alpha\rangle$ definiamo la sua funzione d'onda $\Psi_\alpha(t, q) = \langle q|\alpha, t\rangle$ come l'overlap con l'autostato $|q\rangle$ dell'operatore posizione \hat{q} (indipendente dal tempo nella pittura di Schrödinger).

- (i) Scrivi un'espressione per la funzione $\Psi_\alpha(t, q)$ come integrale sui cammini, nel caso in cui $|\alpha\rangle = |\bar{q}\rangle$ autostato dell'operatore posizione all'autovalore \bar{q} .
- (ii) Considera ora $|\alpha\rangle = |\Omega\rangle$, il ground state del sistema. Fissando la sua energia a $E = 0$, in questo caso la funzione d'onda è indipendente dal tempo ed è data da $\Psi_\alpha(t, q) = \langle q|\Omega\rangle$. Parti dall'integrale sui cammini definiti sull'intervallo temporale $[-T, t]$ con condizioni $q(-T) = q_0$ e $q(t) = q$. Usando la $i\epsilon$ prescription, prendi il limite $T \rightarrow +\infty$ e mostra che questo integrale converge, a meno di una costante di normalizzazione indipendente da q , alla funzione d'onda del ground state del sistema. Puoi assumere che l'autostato $|q_0\rangle$ della posizione abbia un prodotto scalare non nullo con il ground state $\langle \Omega|q_0\rangle \neq 0$.
- (iii) Usa l'espressione in termini di integrale sui cammini, e la definizione di integrale sui cammini come limite di integrali sulle posizioni in tempi successivi, per ottenere

$$\Psi_\alpha(t, q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dq' e^{\frac{i}{\hbar} \left[\frac{m(q-q')^2}{2\epsilon} - \epsilon V(q) \right]} \Psi_\alpha(t - \epsilon, q') . \quad (2)$$

dove $\mathcal{N} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon \hbar}}$ è un fattore di normalizzazione. Usa questa espressione per riscrivere

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi_\alpha(t, q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dq' e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m(q-q')^2}{2\epsilon}} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon V(q)} \Psi_\alpha(t - \epsilon, q') - \Psi_\alpha(t - \epsilon, q)}{\epsilon} . \quad (3)$$

Effettua il cambio di variabile da q' a $\delta q = \frac{q' - q}{\sqrt{\epsilon}}$, espandi $e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon V(q)} \Psi_\alpha(t - \epsilon, q + \sqrt{\epsilon} \delta q)$ in ϵ fino all'ordine $\mathcal{O}(\epsilon^1)$, quindi calcola l'integrale Gaussiano in δq e deriva che $\Psi_\alpha(t, q)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_\alpha(t, q) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right] \Psi_\alpha(t, q) . \quad (4)$$

- (iv) Generalizza al caso di una teoria di campo scalare con azione

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] . \quad (5)$$

Usando l'integrale sui cammini, scrivi il funzionale d'onda $\Psi_\alpha(t, \phi)$, che dipende da una funzione $\phi(\vec{x})$ di $\vec{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$, nei due casi: a) $|\alpha\rangle = |\bar{\phi}\rangle$ autostato dell'operatore $\hat{\phi}(\vec{x})$ all'autovalore $\bar{\phi}(\vec{x})$; b) $|\alpha\rangle = |\Omega\rangle$ stato fondamentale (vuoto). Quindi segui step analoghi a quelli del punto (iii) per mostrare che il funzionale d'onda soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_\alpha(t, \phi) = \int d^{d-1} \vec{x} \left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\delta^2}{\delta \phi(\vec{x}) \delta \phi(\vec{x})} + \frac{1}{2} (\partial_{\vec{x}} \phi(\vec{x}))^2 + V(\phi(\vec{x})) \right] \Psi_\alpha(t, \phi) . \quad (6)$$

Esercizio 2

Per le due seguenti teorie di campo si trovino le regole di Feynman per i vertici e i propagatori, e si disegnino (non è necessario calcolarli) tutti i diagrammi di Feynman *connessi* che contribuiscono alla funzione a due punti $\langle \phi \phi \rangle$ e alla funzione a quattro punti $\langle \phi \phi \phi \phi \rangle$ al prim'ordine nella costante di accoppiamento g . Per ciascun diagramma si calcoli il fattore di simmetria.

(i) Teoria con azione

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{g}{6!} \phi^6 \right]$$

(ii) Teoria con azione

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{g}{8} ((\partial_\mu \phi)^2)^2 \right]$$