Geometria 3 - Curve e superfici 2025/2026
Foglio di esercizi 4

Prof. Valentina Beorchia

23 marzo 2026

1. Si consideri la sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.
   (a) Si verifichi che per ogni $v \in S^2$ vale che $v \perp T_v S^2$, dove $T_v S^2$ è il piano vettoriale tangente a S^2 in v.
   (b) Si consideri $N = (0, 0, 1)$, il polo nord di S^2, e si definisca l'applicazione
   $$p_N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$
   ponendo $p_N(y) = Ny \cap \{z = 0\}$, dove Ny indica la retta per N ed y. La mappa p_N si chiama *proiezione stereografica* di S^2 dal polo nord.
   Analogamente si definisca p_S dove $S = (0, 0, -1)$ è il polo sud.
   Si dimostri che $\{(S^2 \setminus \{N\}, p_N), (S^2 \setminus \{S\}, p_S)\}$ è un atlante per S^2.

2. Si consideri la funzione $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da
   $$\Phi(u, v) = (u \cos v,\ u \sin v,\ bv) \qquad \text{con } b > 0.$$
   (a) Si verifichi che $S = \Phi(\mathbb{R}^2)$ è una superficie regolare.
   (b) Si descrivano le curve coordinate, cioè quelle del tipo $\Phi(u_0, t)$ e $\Phi(t, v_0)$ con $u_0 \in \mathbb{R}$ e $v_0 \in \mathbb{R}$ fissati.
   (c) Si verifichi che l'asse z è contenuto in S.
   (d) Si determinino le equazioni cartesiane del piano tangente e del piano tangente affine in un punto generico della superficie.
   (e) Si verifichi che localmente la superficie è esprimibile come grafico di una funzione, dando esplicitamente delle espressioni per le funzioni utilizzate.

3. Si consideri il piano
$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}.$$
Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ l'aperto
$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > v\},$$
e sia $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$\Phi(u, v) = (u + v,\ u + v,\ uv).$$
   (a) Si calcoli la matrice jacobiana di Φ e se ne calcoli il rango in un punto generico.

   (b) Si verifichi che $\Phi(U) \subset H$.

   La funzione Φ è una parametrizzazione locale di H?
   $\Phi(U)$ è un aperto di H?
   Φ è una parametrizzazione locale di $\Phi(U)$?

   Si giustifichino le risposte.

4. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata regolare, e supponiamo che la curvatura di α non si annulli mai: $k(t) > 0$ per ogni $t \in I$. Poniamo
$$\varphi : I \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(t, s) = \alpha(t) + s\alpha'(t),$$
dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Si dimostri che $\varphi(I \times \mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie, detta *sviluppabile delle tangenti*, che verifica le condizioni 1 e 3 della definizione di superficie regolare.

   Si verifichi, inoltre, che i piani tangenti alla superficie lungo le curve $\varphi(\text{cost}, s)$ sono costanti.