Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:
8 aprile 2025

3 Secondo Principio della Termodinamica

3.2 Lezione #10

3.2.4 Ciclo Stirling

Il Ciclo Stirling (Robert Stirling 25/10/1790 - 06/06/1878) viene idealizzato nel 1816, ancor prima del Ciclo di Carnot (1824), e consiste di una coppia di trasformazioni isoterme intervallata da due trasformazioni isocore [fig. 1]. A quel tempo non era nota nemmeno l'equazione di stato dei gas perfetti, formulata per la prima volta da Clapeyron nel 1834. Il fluido utilizzato per il ciclo è idrostatico e pertanto non vi è scambio di materia con l'esterno, ma il fluido viene riscaldato e raffreddato attraverso il contatto diatermico con serbatoi esterni. Il ciclo può funzionare sia in senso orario (macchina termica) che antiorario (refrigeratore). La macchina di Stirling ebbe all'inizio un discreto successo in quanto il fluido utilizzato era aria calda, e non vapore acqueo, utilizzato fin dalla nascita della prima macchina a vapore (1698) [1]. Entrambi i cicli di Stirling vennero presto dimenticati in favore delle macchine termiche a combustione interna (ciclo Otto e Diesel) e dei refrigeratori a compressione con evaporazione (ciclo di Rankine inverso) perché più efficienti, ma soprattutto nel caso delle macchine, più compatti. Nel 1940 il frigorifero di Stirling riprende vigore con lo sviluppo della **criogenia**.

La macchina di Stirling ideale è un gas perfetto che compie trasformazioni reversibili e possiamo calcolarne il rendimento che, nell'ipotesi dell'utilizzo di particolari "rigeneratori interni" (una condizione totalmente ideale), risulta essere pari a quello di una macchina di Carnot che operi fra le stesse temperature. Vediamo di spiegare questo risultato.

[1] le macchine a vapore avevano un pericoloso difetto: nel passaggio da stato liquido a quello di vapore la pressione può aumentare in modo enorme visto che il volume del vapore è mille volte quello del liquido, pertanto un difetto della valvola di sicurezza del bollitore e l'esplosione era garantita

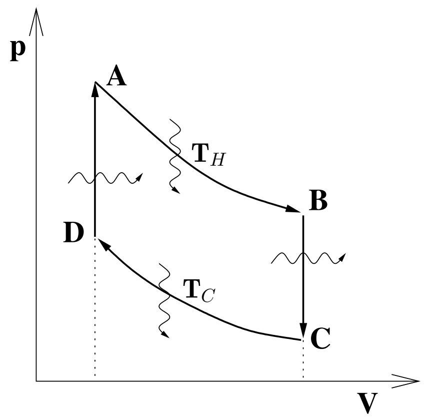

Figura 1: macchina di Stirling

Il rendimento di una macchina è definito come "il lavoro compiuto dalla macchina diviso per la somma dei calori assorbiti dalla macchina". Se consideriamo il ciclo di fig. 1, possiamo calcolare i calori scambiati durante le quattro trasformazioni:

$$Q_{AB} = L_{AB} = nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$$
$$Q_{BC} = nc_V(T_C - T_H) < 0$$
$$Q_{CD} = L_{CD} = nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) < 0$$
$$Q_{DA} = nc_V(T_H - T_C) > 0$$

Il calore ceduto è $Q_{ced} = Q_{BC} + Q_{CD}$ mentre il calore assorbito $Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{DA}$ e pertanto

$$\begin{aligned}
\eta = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} &= 1 + \frac{nc_V(T_C - T_H) + nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nc_V(T_H - T_C)} \\
&= 1 + \frac{-nc_V(T_H - T_C) - nRT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}{nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nc_V(T_H - T_C)} \\
&= 1 - \frac{nRT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nc_V(T_H - T_C)}{nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nc_V(T_H - T_C)} \\
&= 1 - \frac{T_C + \alpha}{T_H + \alpha} < 1 - \frac{T_C}{T_H} = \eta_C
\end{aligned}$$

con

$$\alpha = \frac{c_V(T_H - T_C)}{R \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} > 0$$

proporzionale al calore assorbito durante l'isocora DA. Il "rigeneratore interno" fa si che nel calcolo del rendimento il calore ceduto durante l'isocora BC venga "reimmesso" nei serbatoi per poi essere assorbito durante l'isocora DA in modo tale da poterlo trascurare per il calcolo del rendimento. In questo modo, i calori assorbiti e ceduti nelle trasformazioni isocore si annullerebbero ed il rendimento del ciclo Stirling risulterebbe uguale a quello di un ciclo di Carnot.

Analoga situazione si viene a creare quando parliamo di un frigorifero di Stirling [fig. 2]. Anche in questo caso se si considerano alcune trasformazioni in modo poco attento, si rischia di trovare risultati contrari a quanto affermato dal teorema di Carnot. Quando parliamo di "coefficiente di prestazione" dobbiamo chiarire che cosa intendiamo per lavoro e per calore assorbito. Il concetto di lavoro ci è chiaro, si tratta della somma di tutti i lavori fatti dal e sul sistema. Il calore, nel caso di un frigorifero, è quello che riusciamo ad estrarre dal sistema o serbatoio alla temperatura più bassa, mentre nel caso della pompa di calore è quello che vogliamo fornire al sistema o serbatoio alla temperatura più alta.

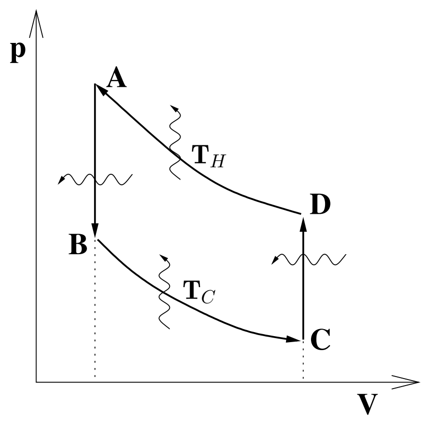

Figura 2: Frigorifero di Stirling

Partiamo dal frigorifero. In questo caso Il coefficiente di prestazione $\omega_{CC} = Q_{ass}/(-L)$, dove consideriamo, sbagliando, **tutto** il calore assorbito anziché il solo calore assorbito alla temperatura T_C. Valutiamo calori e lavoro per le quattro trasformazioni:

$$Q_{AB} = nc_V(T_C - T_H) < 0$$
$$Q_{BC} = L_{BC} = nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) > 0$$
$$Q_{CD} = nc_V(T_H - T_C) > 0$$
$$Q_{DA} = L_{DA} = nRT_H \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right) < 0$$

La situazione è invertita rispetto a prima per cui il calore assorbito è $Q_{ass} = Q_{BC} + Q_{CD}$ mentre il calore ceduto è $Q_{ced} = Q_{AB} + Q_{DA}$ e pertanto

$$\begin{aligned}
\omega_{CC} &= \frac{Q_{ass}}{-L} = \frac{Q_{ass}}{-(Q_{ass} + Q_{ced})} \\
&= \frac{nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) + nc_V(T_H - T_C)}{-\left(nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) + nRT_H \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right)\right)} \\
&= \frac{nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) + nc_V(T_H - T_C)}{nR \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)(T_H - T_C)} \\
&= \frac{T_C + \alpha}{T_H - T_C} > \frac{T_C}{T_H - T_C} = \omega_{Carnot}
\end{aligned}$$

Otteniamo un risultato contrario al teorema di Carnot, proprio perché abbiamo considerato anche il calore assorbito dai serbatoi (infiniti) con temperature tra T_C e T_H con i quali il sistema è stato in contatto durante la trasformazione isocora CD. Se invece consideriamo solo il calore "**utile**" assorbito dal serbatoio a T_C, allora $Q_{ass} = Q_{utile} = Q_{BC}$ e sparisce il termine α dall'equazione appena scritta. Otteniamo quindi $\omega_{CC} = \omega_{Carnot}$.

La situazione reale è ancora diversa. Infatti in natura non esistono trasformazioni isocore quasi statiche, in quanto per farlo dovremmo avere a disposizione infiniti serbatoi tra le due temperature, iniziale e finale, della trasformazione. Una trasformazione isocora in pratica si ha quando, mantenendo costante il volume, si pone il sistema in contatto con un altro sistema a temperatura diversa. La trasformazione in questo caso è irreversibile in quanto i due sistemi **non** sono, istante per istante, in equilibrio termico, ma solo quando avranno raggiunto la stessa temperatura. Ovviamente nel caso di un sistema in contatto con un serbatoio, l'equilibrio termico sarà raggiunto alla temperatura del serbatoio. Prendiamo quindi in considerazione un frigorifero di Stirling reale [fig. 3].

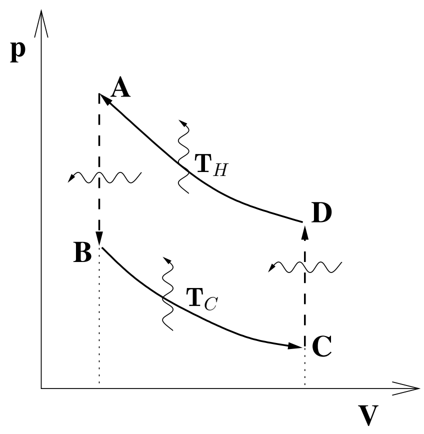

Figura 3: Frigorifero di Stirling irreversibile

I calori scambiati ed il lavoro fatto durante le trasformazioni sono gli stessi di quanto fatto precedentemente. Infatti il calore scambiato durante le trasformazioni isocore, reversibili o irreversibili che siano, è uguale alla variazione di Energia Interna, che è funzione di stato. Ma allora cosa cambia? Dobbiamo fare un ragionamento un po' più complesso. Durante l'isocora AB il sistema cede calore al serbatoio a T_C da cui invece vogliamo estrarre calore! Alla fine, il calore utile estratto dal serbatoio a T_C è $Q_{utile} = Q_{AB} + Q_{BC} < Q_{BC}$. In pratica il frigorifero durante il funzionamento *scalda* un poco lo stesso ambiente che vorrebbe raffreddare... Facciamo i calcoli, ed otteniamo:

$$\begin{aligned}
\omega_{CC} = \frac{Q_{utile}}{-L} &= \frac{nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) + nc_V(T_C - T_H)}{-\left(nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) + nRT_H \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right)\right)} \\
&= \frac{nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) + nc_V(T_C - T_H)}{nR \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)(T_H - T_C)} \\
&= \frac{T_C - \alpha}{T_H - T_C} < \frac{T_C}{T_H - T_C} = \omega_{Carnot}
\end{aligned}$$

Abbiamo già visto la differenza tra i coefficienti di prestazione per frigorifero e pompa di calore. In quest'ultimo caso il calcolo del coefficiente di prestazione è analogo. Quando vogliamo scaldare una stanza (il serbatoio a temperatura T_H) incorriamo nello stesso problema. Infatti durante la trasformazione CD il sistema assorbe parte del calore proprio dal serbatoio a T_H e pertanto anche in questo caso il calore utile fornito al serbatoio a T_H è $Q_{utile} = Q_{CD} + Q_{DA} > Q_{DA} < 0$.

$$\omega_{PC} = \frac{Q_{utile}}{L} = \frac{nc_V(T_H - T_C) + nRT_H \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right)}{\left(nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) + nRT_H \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right)\right)}$$

e manipolando un po' i termini troviamo alla fine

$$\omega_{PC} = \frac{-nRT_H \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) + nc_V(T_H - T_C)}{nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) - nRT_H \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)}$$

e quindi

$$\omega_{PC} = \frac{T_H - \alpha}{T_H - T_C} < \frac{T_H}{T_H - T_C} = \omega_{Carnot}$$

Rimane comunque valida la relazione per cui

$$\omega_{PC} = \frac{T_H - \alpha}{T_H - T_C} = \frac{T_H + T_C - T_C - \alpha}{T_H - T_C} = \frac{T_H - T_C}{T_H - T_C} + \frac{T_C - \alpha}{T_H - T_C} = 1 + \omega_{CC}$$