Foglio 4

Esercizio 1 Siano $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ e $r\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$, e sia $\varphi := f \circ r$ la loro composizione. In ciascuno dei casi seguenti, calcolare il valore della derivata $\varphi'(t_0)$ nel punto t_0.

(i) $f(x,y,z) = (x-2y-z)^3, \quad r(2) = (0,0,1), \quad r'(2) = (2,1,-1), \quad t_0 = 2;$

(ii) $\nabla f(x,y,z) = (1,2,-1), \quad r(t) = (t, 1-t^2, \sin(t)), \quad t_0 = 0;$

(iii) $f(x,y) = xy + e^z, \quad r(t) = (1, t, \cos(t)), \quad t_0 = \pi.$

Esercizio 2 Date le seguenti coppie di funzioni $\mathbf{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbf{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2$, scrivere esplicitamente la funzione composta $f \circ g$ e calcolarne la matrice Jacobiana in un punto generico. Poi ricalcolare tale matrice tramite la regola della catena, dopo aver scritto le matrici Jacobiane di f e g. Verificare che i risultati coincidono.

(i) $f(x,y,z) = (x+2y, x^2+z), \quad g(u,v) = (u, e^v, uv);$

(ii) $f(x,y,z) = (y\sin(x), z-1) \quad g(u,v) = (2v, \log(1+u^2), u^2).$

Esercizio 3 Scrivere il polinomio di Taylor al second'ordine centrato nell'origine delle seguenti funzioni $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

(i) $f(x,y) = x^2 + \cos(x) + xy;$

(ii) $f(x,y) = 2 - e^{x+y} + 2xy^3.$

Esercizio 4 Individuare i punti critici delle seguenti funzioni e discuterne la natura (ossia stabilire se sono punti di massimo, di minimo, o di sella).

(i) $f(x,y) = x^3 + x - 4xy - 2y^2;$

(ii) $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y};$

(iii) $f(x,y,z) = 1/x + 1/y + 1/z + xyz;$

(iv) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + \log(1+y^4);$

(v) $f(x,y) = x^3 + y^3;$

(vi) $f(x,y) = x^4 + y^4;$

(vii) $f(x,y) = x^2 + y^3;$

(viii) $f(x,y) = x^2 + y^4.$

Esercizio 5 Per ciascuna delle seguenti funzioni, dopo aver verificato che l'origine è un punto critico, stabilire se si tratta di un punto di minimo, di massimo o di sella.

(i) $f(x,y) = x^4 - 3x^2y + y^2$ (può essere utile la fattorizzazione $f(x,y) = 2(y-x^2)(y-x^2/2)$);

(ii) $f(x,y) = \log(1+x^2) - x^2 + xy^2 + y^3 + 2.$

Esercizio 6 Sia $r\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ e $U\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Si supponga che r soddisfi l'equazione $r''(t) = -\nabla U(r(t))$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Dimostrare che la funzione $H\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $H(t) = \frac{1}{2}\|r'(t)\|^2 + U(r(t))$ è costante.

Osservazione: se si interpreta r come traiettoria di un punto di massa unitaria nello spazio e U come energia potenziale relativa una forza conservativa, allora si è dimostrato che l'energia totale H si conserva.

Esercizio 7 Sia $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la funzione di componenti $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $g_2(x,y,z) = x + y + z$ e sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Detta $h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la composizione $f \circ g$, dimostrare che

$$\|\nabla h\| = 4(\partial_1 f)^2 g_1 + 3(\partial_2 f)^2 + 4(\partial_1 f)(\partial_2 f) g_2.$$

Esercizio 8 Per ciascuna delle seguenti funzioni, che si possono interpretare come cambi di coordinate, calcolare la matrice Jacobiana e il suo determinante in un punto generico.

(i) $f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, definita per $\rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)$ (coordinate polari nel piano);

(ii) $f(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$, definita per $\rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)$ (coordinate cilindriche nello spazio);

(iii) $f(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ definita per $\rho > 0, \theta \in (0, 2\pi), \varphi \in (0,\pi)$ (coordinate sferiche nello spazio).

Esercizio 9 Siano $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ e $r\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$. Si supponga che l'immagine di r sia contenuta nell'insieme di livello $E_0 := \{x \in \mathbf{R}^n : g(x) = 0\}$. Dimostrare che, per ogni $t \in \mathbf{R}$, i vettori $r'(t)$ e $(\nabla g)(r(t))$ sono ortogonali.

Esercizio 10 Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $F(x) = f(\|x\|)$. Scrivere ∇F in termini di f'.

Esercizio 11 Sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ omogenea di grado $\alpha \geq 1$, ossia tale che

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y) \tag{1}$$

per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ e $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ (un possibile esempio è la funzione $f(x,y) = x^\alpha + y^\alpha$). Dimostrare che vale la *relazione di Eulero*, ossia per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x,y).$$

Suggerimento: derivare rispetto a λ entrambi i membri dell'identità 1 e poi porre $\lambda = 1$.

Più in generale, dimostrare che se $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è omogenea di grado $\alpha \geq 1$, allora $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$.

Esercizio 12 Siano $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ e $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ e si supponga che per ogni $x \in (a,b)$ valga l'uguaglianza $F(x,\varphi(x)) = 0$. Supponiamo che $x_0 \in (a,b)$ sia tale che $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) \neq 0$. Mostrare che si ha

$$\varphi'(x_0) = -\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\Big)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x},$$

dove le derivate parziali sono valutate nel punto $(x_0, \varphi(x_0))$.

Verificare che il risultato vale, in particolare, quando $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ e $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ sull'intervallo $(a,b) = (-1,1)$.