

# Economia delle assicurazioni e politiche di welfare

## Anno 2025/2026

Prof. Lorenzo Di Domenico

# Recap utilità del valore atteso e valore atteso dell'utilità

- Richiamiamo il concetto di avversione al rischio: **l'utilità generata dal valore atteso è maggiore dell'utilità attesa sull'evento incerto:**

$$U(EW) > EU(W)$$

- Quindi, in generale, esiste un  $W_S < EW$  che genera più utilità dell'utilità attesa derivante dallo scegliere di andare a giocare la lotteria. Ciò è appunto dovuto alla concavità della curva di utilità che esprime, appunto, l'avversione al rischio dell'individuo.

# Recap utilità del valore atteso e valore atteso dell'utilità

- Esempio. La funzione di utilità è così descritta:

$$U = \log(W)$$

Possibili risultati:  $W_1 = 9$ ;  $W_2 = 15$  e la probabilità è  $\pi = 0.5$ .

Calcoliamo il valore atteso:

$$EW = 9 * 0.5 + 15 * 0.5 = 12$$

L'utilità generata direttamente da tale valore è (ossia, l'utilità del valore atteso):

$$u(12) = \log(12) = 2.48$$

Invece, il valore atteso dell'utilità se vado a giocare è:

$$EU = 0.5 * u(9) + 0.5 * u(15) = 0.5 * \log(9) + 0.5 * \log(15) = 2.45$$

# Recap utilità del valore atteso e valore atteso dell'utilità

$$u(EW) > EU$$



$$u(12) > 0.5 * u(9) + 0.5 * u(15)$$



$$2.48 > 2.45$$

# Recap utilità del valore atteso e valore atteso dell'utilità

- Come facciamo a calcolare l'equivalente certo e il premio di rischio?
- L'equivalente certo è il valore della ricchezza certa per la quale ottengo la stessa utilità attesa dell'andare a giocare:

$$U(W_S) = EU$$
$$W_S = U^{-1}(EU)$$

- Nell'esercizio abbiamo:

$$\log(W_S) = 2.45$$
$$W_S = e^{2.45} = 11.58$$
$$P = EW - W_S = 0.42$$

- Se mi offrono almeno 11.59, allora preferisco questa somma certa piuttosto che andare a giocare alla lotteria. Il valore che do alla certezza è 0.42.

# Quanto è disposta a pagare una persona per eliminare il rischio?

$$U(EW) > EU(W)$$

- può essere riscritta come:

$$U(EW + E\check{X}) > EU(EW + \check{X})$$

- Se ipotizziamo che ho un ricchezza iniziale  $W_0$  che durante l'anno può perdere o aumentare di valore e tale variazione incerta è rappresentata da  $\check{X}$ , allora esisterà un valore  $p$  (risk premium) tale che :

$$U(W_0 - p) = EU(W_0 + \check{X})$$

dove  $W_0 + \check{X}$  è la ricchezza incerta (quindi  $EU(W_0 + \check{X})$  è l'utilità risultate dalla somma pesata per le probabilità delle singole utilità derivanti dagli eventi incerti.

# Quanto è disposta a pagare una persona per eliminare il rischio?

$$U(W_0 - p) = E[U(W_0 + \check{X})]$$

- Siccome nella nostra funzione abbiamo equazioni non lineari (le utilità) e a destra abbiamo una funzione dentro un valore atteso, dobbiamo utilizzare lo sviluppo di Taylor per rendere quasi lineare la nostra espressione:

$$v(W_0 - p) \approx v(W_0) - pv'(W_0)$$

$$E[v(W_0 + \check{X})] \approx v(W_0) + \frac{1}{2} \sigma_x^2 v''(W_0)$$

N.b. :  $E(\check{X}^2) = \sigma_x^2$  e  $E(\check{X}) = 0$ ,  $\check{X} \gg p$

# Quanto è disposta a pagare una persona per eliminare il rischio?

$$p = -\frac{1}{2} \sigma_X^2 \frac{u''(W_0)}{u'(W_0)}$$

Coefficiente di avversione assoluta al rischio:

$$R_a = -\frac{u''(W_0)}{u'(W_0)}$$

# Quanto è disposta a pagare una persona per eliminare il rischio?

- Il **premio per il rischio**, cioè la **massima disponibilità a pagare per la certezza** di un individuo, è quindi dato dal prodotto tra:
  - **la metà della varianza della ricchezza** (componente oggettiva)
  - **il coefficiente di avversione assoluta al rischio** (componente soggettiva, generalmente dipendente dalla ricchezza iniziale).
- Il premio per il rischio è **pari a zero** se una di queste due quantità è nulla. Pertanto, affinché si abbia una **disponibilità positiva a pagare per la certezza**, sono necessarie sia una **variazione della ricchezza** sia un'**avversione al rischio**.

# Quanto è disposta a pagare una persona per eliminare il rischio?

- Il **premio per il rischio**, come misura della **massima disponibilità a pagare per la certezza**, è dato dal prodotto tra la **valutazione soggettiva del rischio** (riflessa dal coefficiente di avversione assoluta al rischio) e la **varianza oggettiva della ricchezza**..

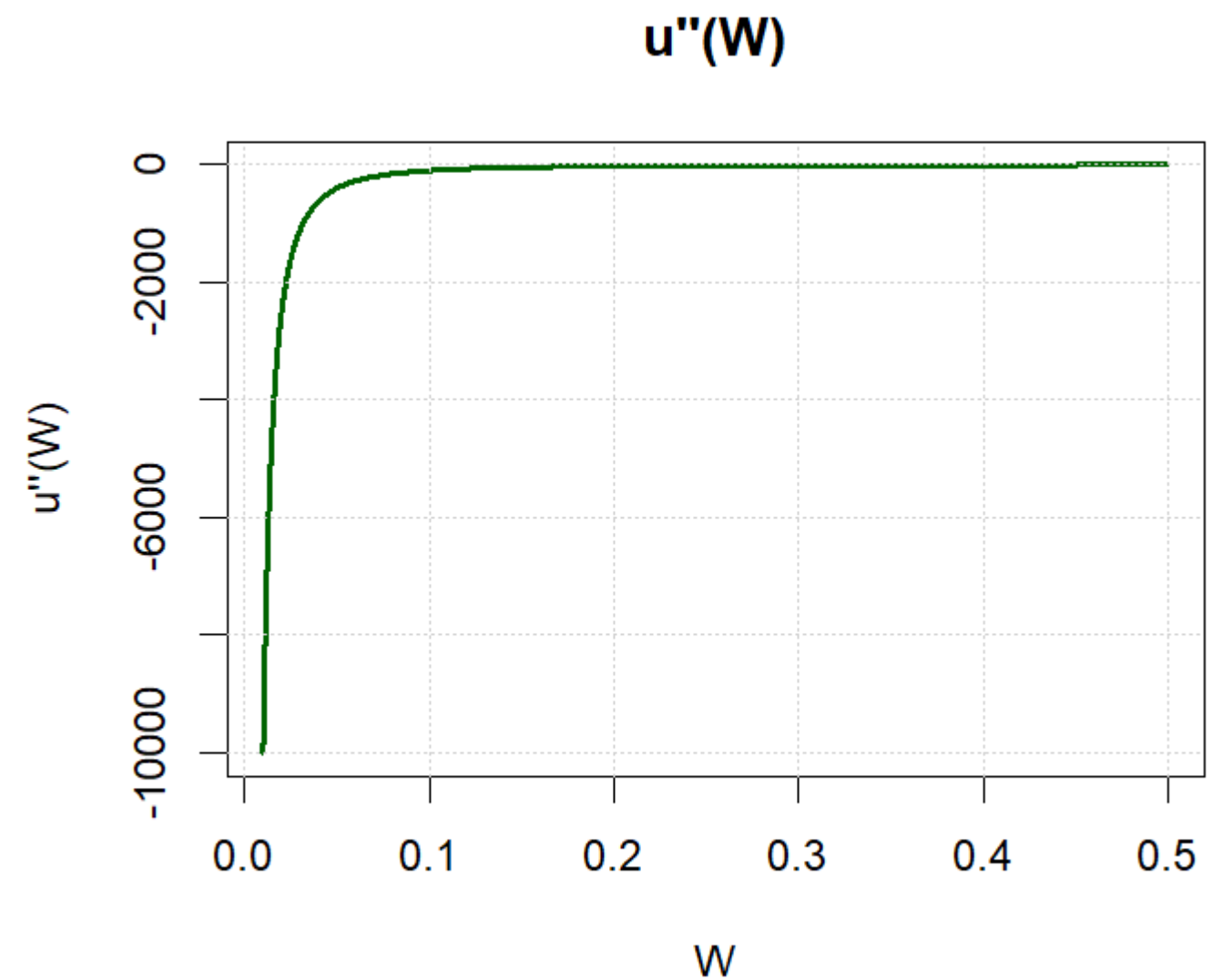
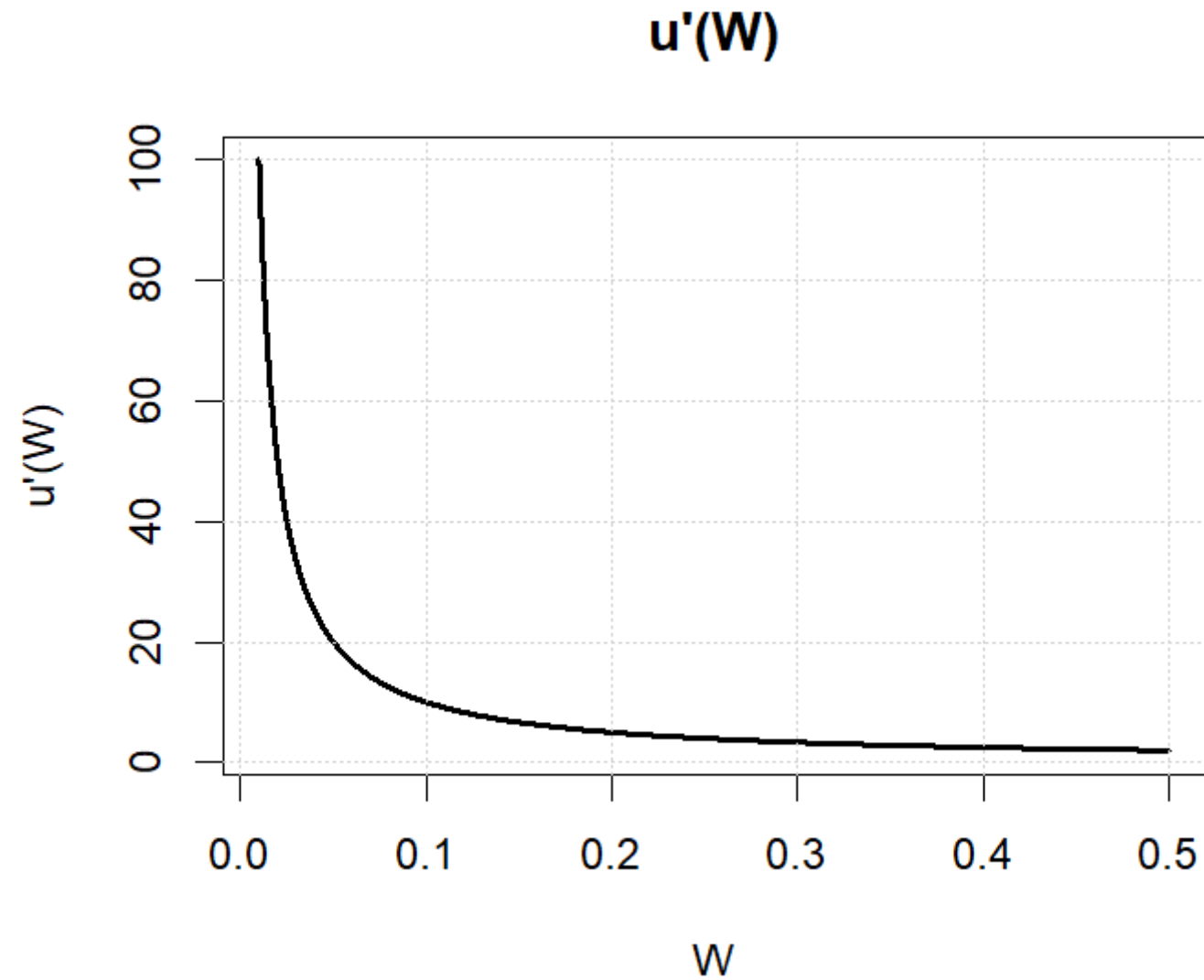
# Quanto è disposta a pagare una persona per eliminare il rischio?

- Esempio numerico:  $U = \log(W)$ ,  $W_0 = 2$ ,  $\sigma_x^2 = 0.5$ . Calcolare quanto è disposto a pagare l'individuo per assicurarsi.

$$\partial' U = \frac{1}{W} = 0.5$$
$$\partial'' U = -\frac{1}{W^2} = -0.25$$

$$p = -\frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{\partial'' U}{\partial' U} = 0.125$$

# Come cambia il premio al rischio al variare della $W_0$ ?



# Come cambia il premio al rischio al variare della $W_0$ ?

- Esempio numerico:  $U = \log(W)$ ,  $W_0 = 3$ ,  $\sigma_x^2 = 0.5$ . Calcolare quanto è disposto a pagare l'individuo per assicurarsi.

$$\partial'U = \frac{1}{W} = 0.33$$

$$\partial''U = -\frac{1}{W^2} = -0.111$$

$$p = -\frac{1}{2}\sigma_x^2 \frac{\partial''U}{\partial'U} = 0.083$$

# L'avversione assoluta al rischio è invariante alle trasformazioni lineari

- Esempio numerico:  $U = 2 * \log(W)$ ,  $W_0 = 2$ ,  $\sigma_x^2 = 0.5$ . Calcolare quanto è disposto a pagare l'individuo per assicurarsi.

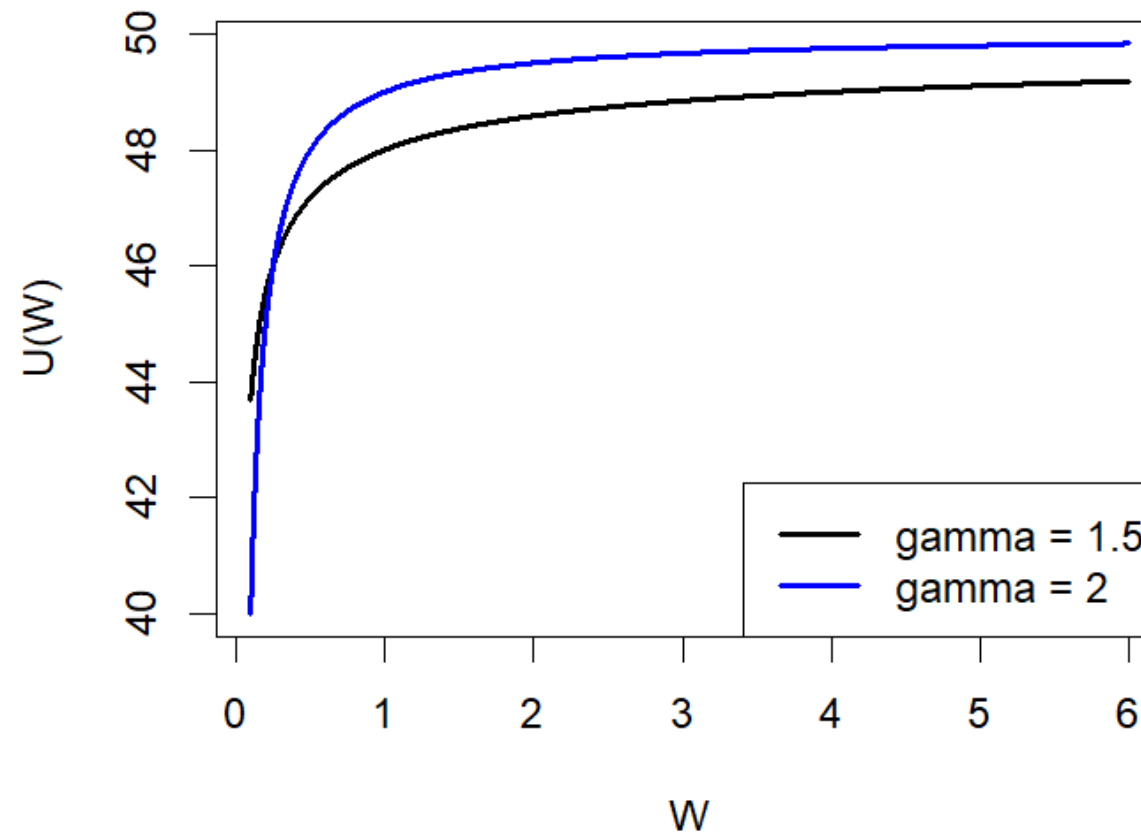
$$\begin{aligned}\partial' U &= \frac{2}{W} = 1 \\ \partial'' U &= -\frac{2}{W^2} = -0.5\end{aligned}$$

$$p = -\frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{\partial'' U}{\partial' U} = 0.125$$

- L'avversione assoluta al rischio è **invariante alle trasformazioni lineari** della funzione di utilità.

# Come cambia il premio al rischio al variare dell'avversione al rischio?

- Esempio numerico:  $U = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ ,  $W_0 = 2$ ,  $\sigma_x^2 = 0.5$ .
- Più  $\gamma$  è alto, più l'individuo è avverso al rischio.
- $\gamma = 1 \rightarrow U = \log(W)$



# Come cambia il premio al rischio al variare dell'avversione al rischio?

- Esempio numerico:  $U = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ ,  $W_0 = 2$ ,  $\sigma_x^2 = 0.5$ ,  $\gamma = 1.5$ . Calcolare quanto è disposto a pagare l'individuo per assicurarsi.

$$\begin{aligned}\partial' U &= W^{-1} \\ \partial'' U &= -\gamma W^{-\gamma-1} \\ R_a &= -\frac{-\gamma W^{-\gamma-1}}{W^{-\gamma}} = \frac{\gamma}{W} = \mathbf{0.75}\end{aligned}$$

$$p = -\frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{\partial'' U}{\partial' U} = \mathbf{0.1875}$$

# Come cambia il premio al rischio al variare dell'avversione al rischio?

- Esempio numerico:  $U = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ ,  $W_0 = 2$ ,  $\sigma_x^2 = 0.5$ ,  $\gamma = 2$ . Calcolare quanto è disposto a pagare l'individuo per assicurarsi.

$$\begin{aligned}\partial' U &= W^{-1} \\ \partial'' U &= -\gamma W^{-\gamma-1} \\ R_a &= -\frac{-\gamma W^{-\gamma-1}}{W^{-\gamma}} = \frac{\gamma}{W} = 1\end{aligned}$$

$$p = -\frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{\partial'' U}{\partial' U} = 0.25$$

# Quanto è disposta a pagare una persona in percentuale alla ricchezza per eliminare il rischio?

- Come cambia il problema se la dimensione del rischio varia con l'aumentare della ricchezza ? (fino ad ora stavamo implicitamente ipotizzando che il rischio non cambia con la variazione della ricchezza).
- Introduciamo una misura di shock proporzionale alla ricchezza:

$$\hat{Y} = W \cdot \hat{X}$$

- $\tilde{X}$  = shock percentuale
- $\tilde{Y}$  = shock monetario effettivo

dove  $\hat{X}$  è indipendente dalla ricchezza e ha media zero. Quindi anche  $\hat{Y}$  ha media zero.

Per esempio:

Se  $\tilde{X} = -0,1$ , vuol dire “perdi il 10%”, allora chi ha 100 perde 10, chi ha 1.000 perde 100.

# Quanto è disposta a pagare una persona in percentuale alla ricchezza per eliminare il rischio?

$$U(W_0 - p) = EU(W_0 + \check{X})$$



$$v[W_0 - W\rho^*] = Ev[W_0 + \hat{Y}]$$

Dove  $\rho^*$  è il premio al rischio proporzionale, da:

$$\rho = W\rho^*$$

Utilizzando l'approssimazione di Taylor:

$$v(W_0 - \rho) \approx v(W_0) - W\rho^*v'(W_0)$$

$$E[v(W_0 + \check{Y})] \approx v(W_0) + \frac{1}{2}\sigma_{\check{Y}}^2v''(W_0)$$

N.b. :  $E(\check{Y}^2) = \sigma_{\check{Y}}^2$  e  $E(\check{Y}) = 0$

# Quanto è disposta a pagare una persona in percentuale alla ricchezza per eliminare il rischio?

$$\rho^* = -\frac{1}{2} \sigma_Y^2 \frac{u''(W_0)}{W u'(W_0)}$$

- Dato che  $\sigma_Y^2 = W^2 \sigma_X^2$ , allora:

$$\rho^* = -\frac{1}{2} \sigma_X^2 \frac{u''(W_0)}{u'(W_0)} W = \frac{1}{2} \sigma_X^2 R_r$$

- Coefficiente di avversione relativa al rischio:

$$R_r = -\frac{u''(W_0)}{u'(W_0)} W = R_a W$$

Il premio al rischio è espresso come una percentuale rispetto alla ricchezza:

$$\rho^* = \frac{\rho}{W}$$

# Quanto è disposta a pagare una persona in percentuale alla ricchezza per eliminare il rischio?

- il coefficiente di avversione relativa al rischio dice **quanto “meno importante” diventa un euro in più quando la tua ricchezza cresce in percentuale.**
- Il coefficiente di avversione relativa al rischio misura la curvatura della funzione di utilità in modo normalizzato rispetto alla ricchezza. Esso indica di quanto diminuisce percentualmente l'utilità marginale quando la ricchezza aumenta dell'1%, ed è quindi adatto quando il rischio varia proporzionalmente alla ricchezza.

# Quanto è disposta a pagare una persona in percentuale alla ricchezza per eliminare il rischio?

- **Quando il rischio scala con la ricchezza, la misura giusta è il rischio relativo.** Se raddoppia la ricchezza e raddoppiano anche le possibili perdite, non basta più il coefficiente assoluto RA; serve il coefficiente relativo  $R_r$ .
- **La disponibilità a pagare per la certezza dipende dalla curvatura “relativa” della funzione di utilità.** Non interessa solo quanto è curva  $u(W)$ , ma quanto lo è in rapporto al livello di ricchezza.
  - **Caso A: rischio fisso:** Puoi perdere sempre 1.000 euro, sia se hai 10.000 sia se hai 1.000.000. Qui ha senso usare il **premio assoluto** e RA.
  - **Caso B: rischio proporzionale:** Puoi perdere il 10% del patrimonio. Se hai 10.000 perdi 1.000; se hai 1.000.000 perdi 100.000. Qui ha senso usare il **premio relativo** e RR.

# Calcolo del premio percentuale

- Esempio numerico:  $U = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ ,  $W_0 = 2$ ,  $\sigma_x^2 = 0.5$ ,  $\gamma = 1.5$ . Calcolare quanto è disposto a pagare l'individuo per assicurarsi.

$$\begin{aligned}\partial' U &= W^{-1} \\ \partial'' U &= -\gamma W^{-\gamma-1} \\ R_r &= -\frac{-\gamma W^{-\gamma-1}}{W^{-\gamma}} W = \gamma = 1.5\end{aligned}$$

$$p^* = -\frac{1}{2} \sigma_x^2 R_r = 0.375$$

- Ora il premio (che è appunto espresso come percentuale della ricchezza) non varia con l'aumentare della ricchezza.

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Partiamo da un esempio: Si consideri che un individuo debba scegliere tra due strategie (A e B) per affrontare il rischio associato al valore della sua ricchezza  $W_2 = 100$

- Strategia A:

$$W_1 = 80 \quad \pi = 0.1$$

$$W_2 = 100 \quad \pi = 0.9$$

- Strategia B:

$$W_1 = 33.33 \quad \pi = 0.03$$

$$W_2 = 100 \quad \pi = 0.97$$

Quale strategia sceglie?

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Partiamo da un esempio: Si consideri che un individuo debba scegliere tra due strategie (A e B) per affrontare il rischio associato al valore della sua ricchezza  $W_2 = 100$

- Strategia A:

$$W_1 = 80 \quad \pi = 0.1$$
$$W_2 = 100 \quad \pi = 0.9$$

- Strategia B:

$$W_1 = 33.33 \quad \pi = 0.03$$
$$W_2 = 100 \quad \pi = 0.97$$

L'individuo è avverso al rischio, per cui la sua funzione di utilità è descritta dalla seguente

funzione  $U = 100 + 5 \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ , con  $\gamma = 1.5$

Quale strategia sceglie?

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Entrambe le strategie generano un valore atteso uguale a 98:

$$EW_A = \pi_1^A W_1^A + \pi_2^A W_2^A = 98 = EW_B = \pi_1^B W_1^B + \pi_2^B W_2^B$$

- Quanto è l'utilità attesa di ogni strategia?

$$EU_A = \pi_1^A u(W_1^A) + \pi_2^A u(W_2^A) = 98.98$$

$$EU_B = \pi_1^B u(W_1^B) + \pi_2^B u(W_2^B) = 98.97$$

- L'individuo sceglie la strategia che massimizza la sua utilità attesa: **B**

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Per risolvere il problema decisionale in condizioni di incertezza, l'individuo deve avere una nozione precisa di:
  - (1) le azioni alternative;
  - (2) le probabilità con cui si verificano i possibili stati;
  - (3) una funzione che associ le azioni alle conseguenze;
  - (4) un ordinamento delle preferenze o una funzione di utilità/rischio definita sulle conseguenze.

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

## Matrice delle Decisioni

Azioni $a_i$	$s_1$	... $s_m$	$u[c_{ij}]$
$a_1$	$c_{11}$	$c_{1m}$	$u[c_{1j}]$
$a_2$	$c_{21}$	$c_{2m}$	$u[c_{2j}]$
...	...	...	...
Prob. $\pi_j$	$\pi_1$	$\pi_m$	

## Tre passi di Bernoulli

1

### Verifica la situazione

Associa a ogni scelta le conseguenze possibili e le probabilità  $\pi_j$

2

### Valuta le conseguenze

Trasforma le conseguenze in utilità tramite  $u(\cdot)$

3

### Massimizza l'utilità attesa

$EU[a_i] = \sum_j \pi_j \cdot u[c_{ij}] \rightarrow$  scegli l'azione con EU massima

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Scegli l'azione che massimizza l'utilità attesa:

$$EU[a_i] := \sum_j \pi_j u(c_{ij}) \equiv \sum_j \pi_j u(a_i, s_j)$$

$$\text{con } \pi_j \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_j \pi_j = 1$$

$$c_1 := c(a_1, s_j), \quad c_2 := c(a_2, s_j) \quad \forall s_j$$

$$EU[c_1] \geq EU[c_2] \iff a_1 \succeq a_2$$

**Utilità attesa:**

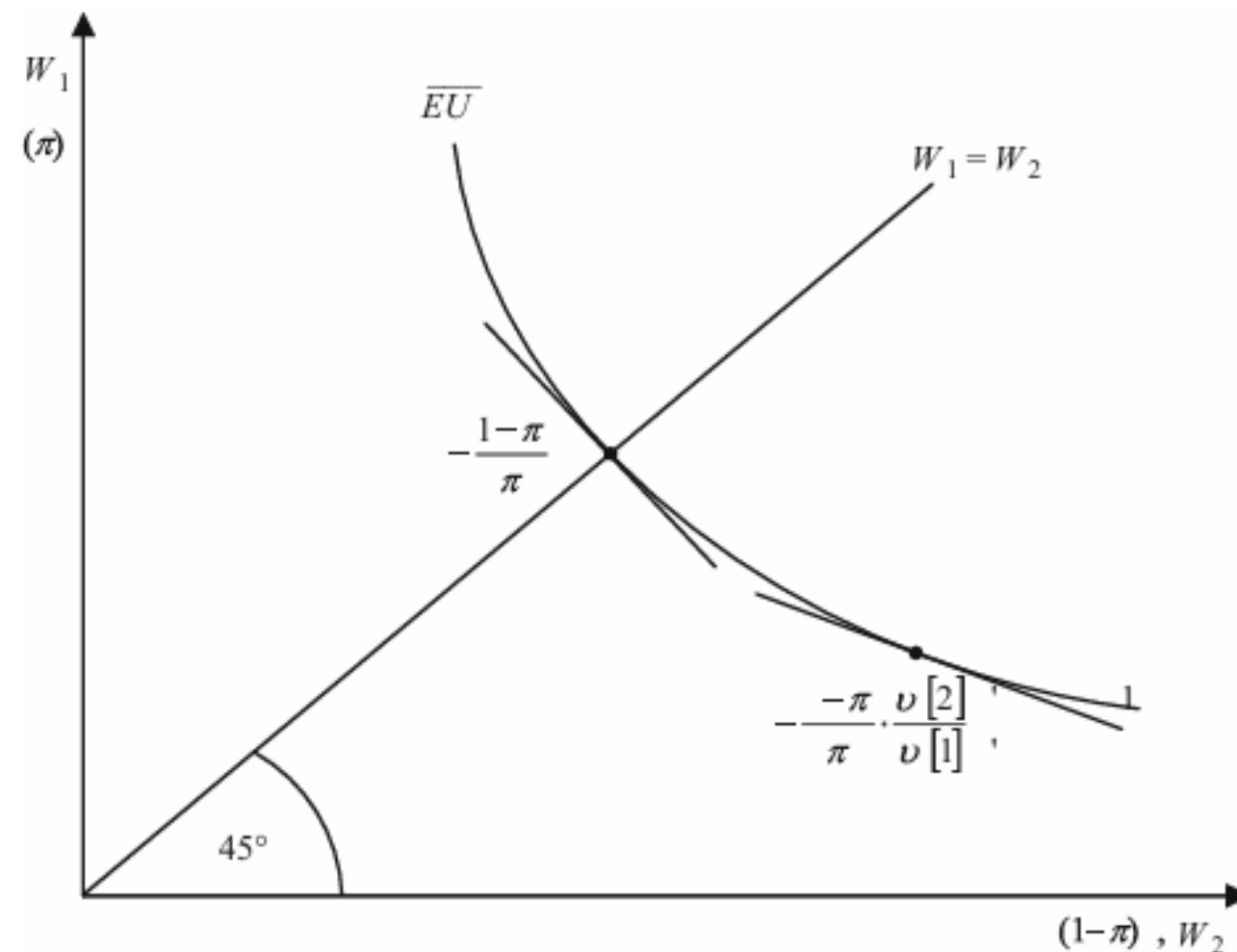
$$EU(a_i) = \sum_j \pi_j u(c_{ij})$$

$\pi_j$  : probabilità dello stato  $s_j$ ;  $\sum_j \pi_j = 1$

$c_{ij}$  : conseguenza dell'azione  $a_i$  nello stato  $s_j$

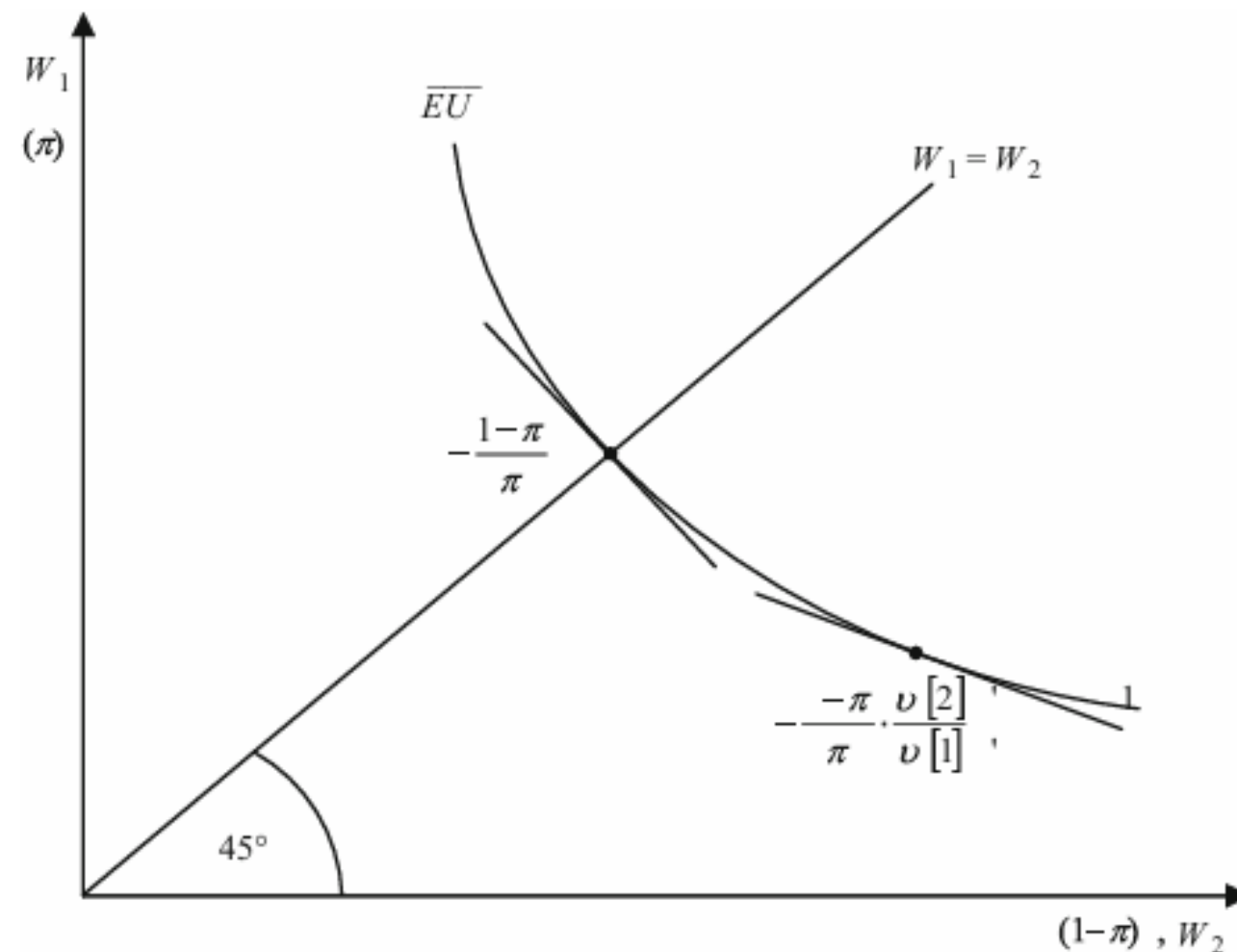
**Regola di scelta:**  $EU(a_1) \geq EU(a_2) \iff a_1$  è preferita (o indifferente) a  $a_2$

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa



- $W_1$ : ricchezza nello stato con perdita
- $W_2$ : ricchezza nello stato senza perdita
- $\pi$ : probabilità della perdita
- $1-\pi$ : probabilità di non perdita

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa



- Spostandoci da destra verso sinistra lungo la curva d'indifferenza, la ricchezza attuale diminuisce e quella che avremmo in caso di danno aumenta.
- Questo ci dice a quanta della ricchezza che abbiamo siamo disposti a rinunciare per diminuire le perdite che avremmo nel caso in cui l'evento negativo si verifici (questo spostamento include intrinsecamente il concetto di rischio).

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Lungo la curva d'indifferenza abbiamo che:

$$dEU(\tilde{W}) = \pi u'(W_1)dW_1 + (1 - \pi)u'(W_2)dW_2 = 0$$

- Pendenza della curva d'indifferenza:

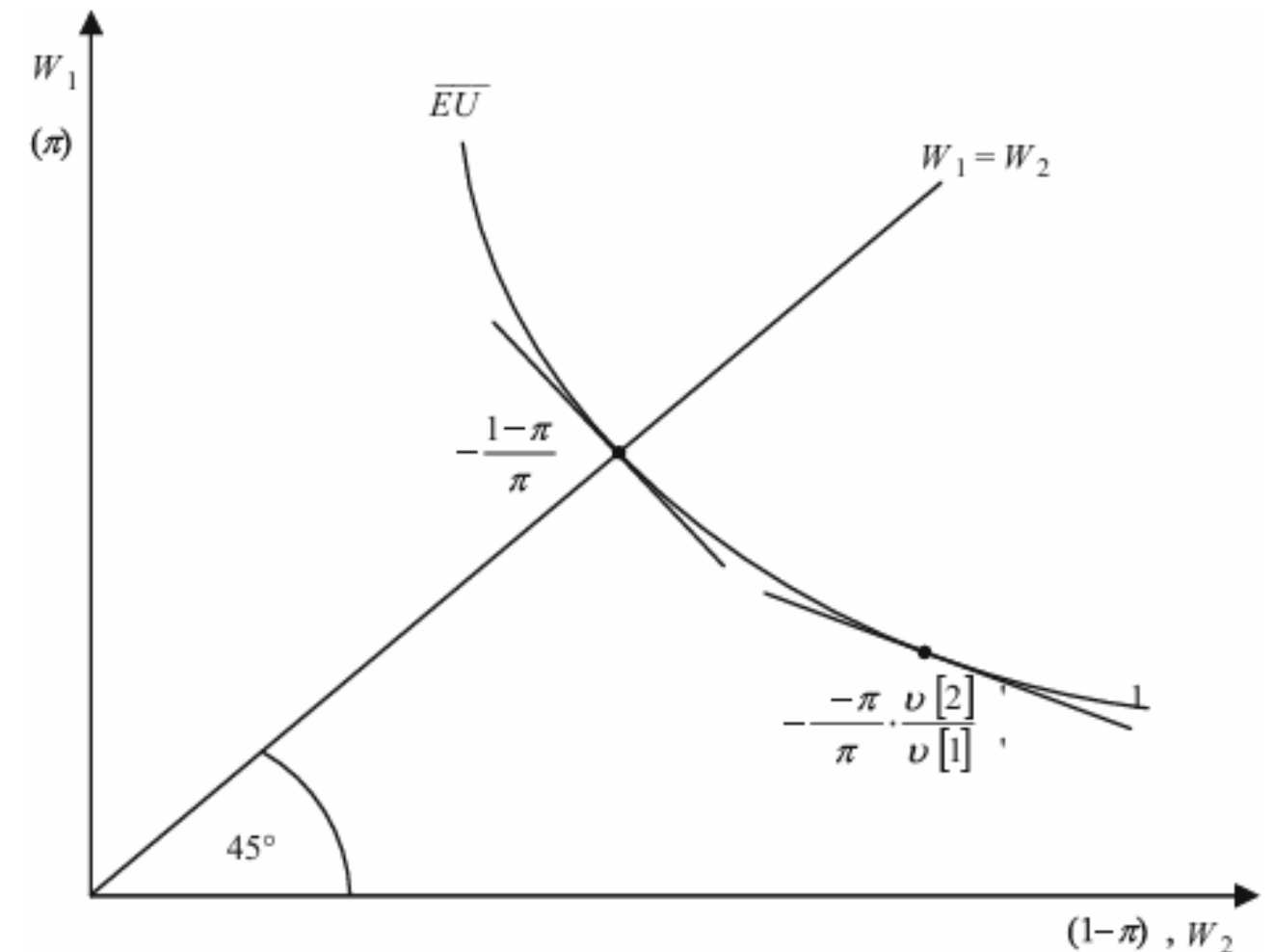
$$\left. \frac{dW_1}{dW_2} \right|_{EU} = -\frac{1 - \pi}{\pi} \cdot \frac{u'(W_2)}{u'(W_1)}$$

- Dice quanto deve aumentare la ricchezza nello stato di perdita  $W_1$  per compensare una riduzione della ricchezza nello stato senza perdita  $W_2$ , restando sullo stesso livello di utilità attesa.
- Il rapporto  $\frac{1-\pi}{\pi}$  pesa le probabilità
- Il rapporto  $\frac{u'(W_2)}{u'(W_1)}$  pesa le utilità marginali

Poiché nello stato con perdita  $W_1 < W_2$ , con utilità concava si ha:

$$u'(W_1) > u'(W_2)$$

cioè un euro quando sei “più povero” vale di più.



# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- La pendenza della curva di indifferenza **sulla linea di certezza**  $W_1 = W_2$ .

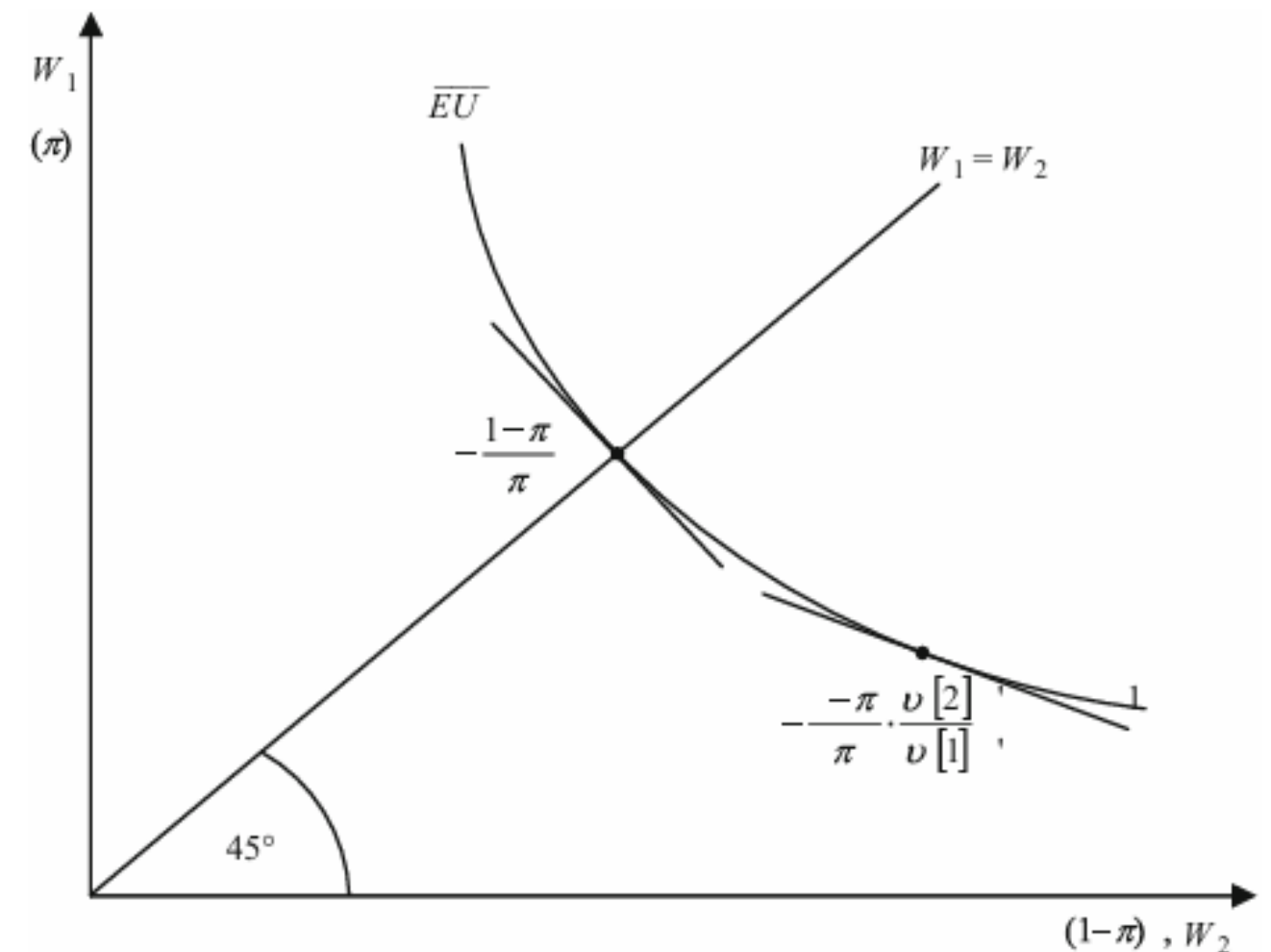
$$\left. \frac{dW_1}{dW_2} \right|_{W_1=W_2} = -\frac{1-\pi}{\pi}$$

- **In tal caso la ricchezza che ho in caso di danno è uguale alla ricchezza attuale.** Per cui anche le utilità marginali sono uguali:

$$u'(W_1) = u'(W_2)$$

Quindi il rapporto delle utilità marginali diventa 1.

- Sulla linea di certezza, la pendenza dipende solo dalle probabilità. Se  $\pi$  è piccola, la curva è molto ripida: significa che l'individuo richiede molta compensazione nello stato raro ma sfavorevole per rinunciare a ricchezza nello stato favorevole.



# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Includiamo esplicitamente l'assicurazione:

$$W_1 = W_0 - L + I - P(I), \quad W_2 = W_0 - P(I)$$

## Dove:

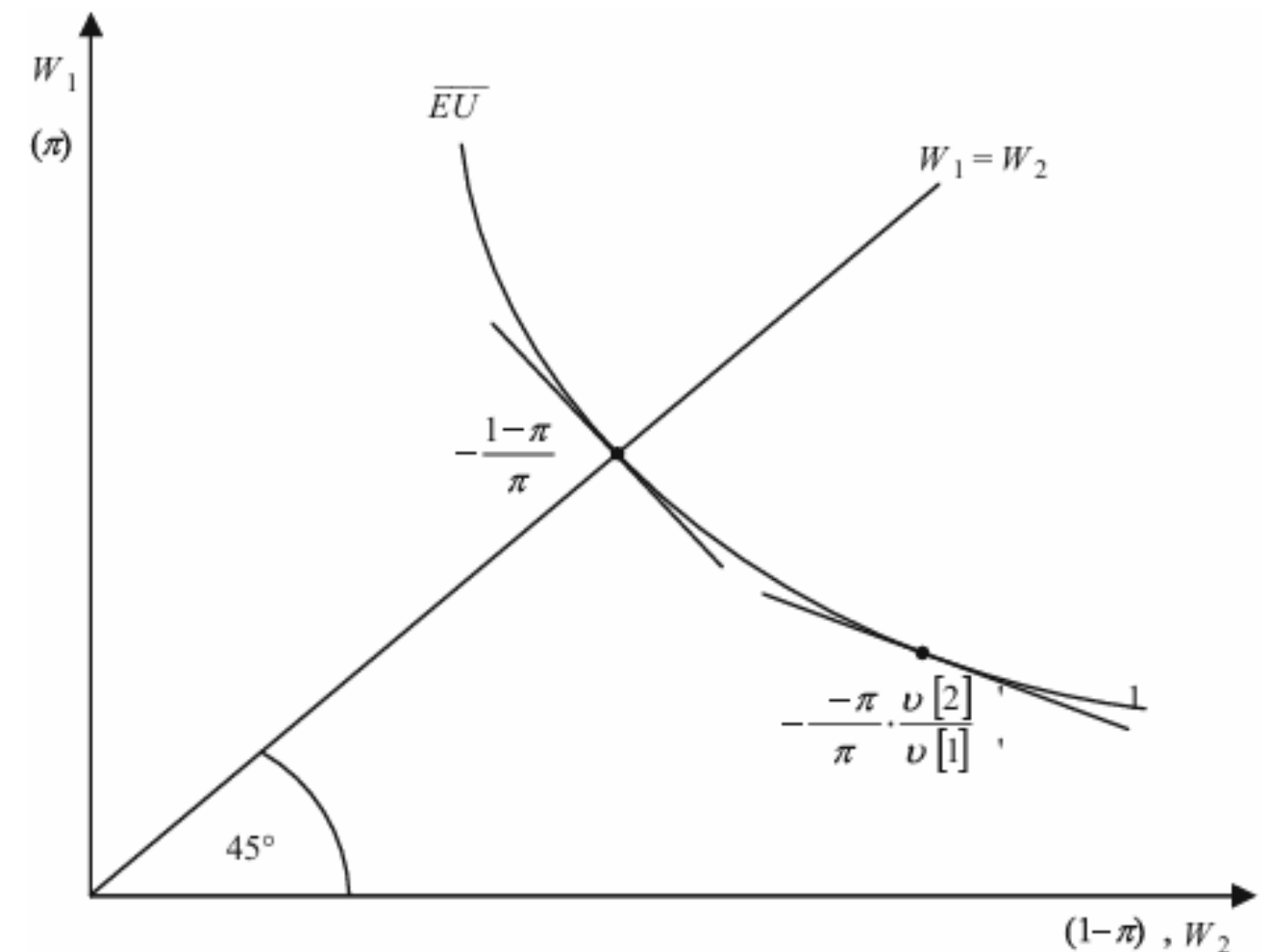
$W_0$  :ricchezza iniziale

$L$ : perdita

$I$ : indennizzo assicurativo

$P(I)$  :premio, che dipende dalla copertura scelta  $I$

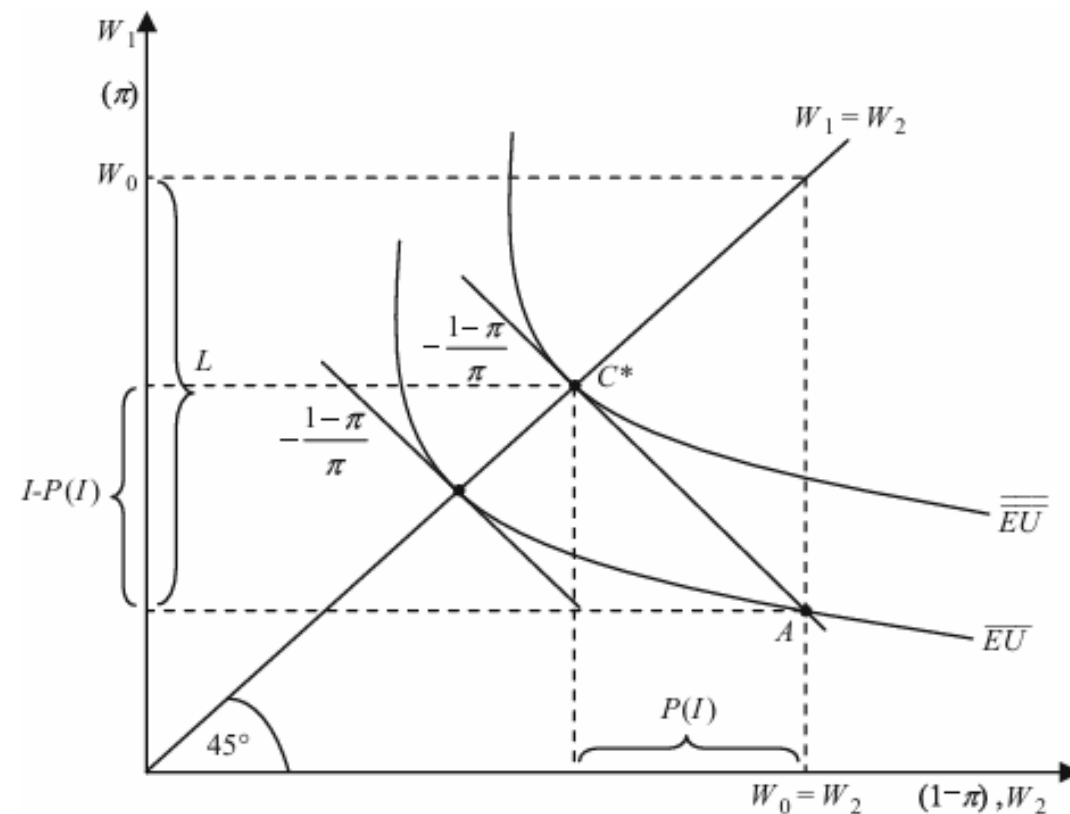
- L'assicurazione: **augmenta**  $W_1$  ,cioè migliora lo stato cattivo ma **riduce**  $W_2$  ,perché paghi il premio anche se il danno non avviene.
- Quindi tutta la scelta assicurativa è un trade-off: sacrifico un po' di ricchezza nello stato buono per stare meglio nello stato cattivo.





# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Sapendo che il premio è equo, ossia  $P(I) = \pi I$ , quanto è il premio che desidero pagare, ossia quanto  $W_1$  e  $W_2$  desidero avere?



- Sopra la retta assicurativa:  $P(I) < \pi I$
- Sotto la retta assicurativa:  $P(I) > \pi I$

- La retta assicurativa è (combinazioni assicurative entro cui posso muovermi, ossia per cui  $P(I) = \pi I$ ):

$$W_1 = \frac{W_0}{\pi} - L - \frac{1 - \pi}{\pi} W_2$$

- Pendenza della retta assicurativa:

$$\frac{\partial W_1}{\partial W_2} = -\frac{1 - \pi}{\pi}$$

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Il problema dell'assicurato è:

$$\max EU = \pi u[W_0 - L + I - P(I)] + (1 - \pi)u[W_0 - P(I)]$$

- Cioè sceglie l'ammontare di copertura  $I$  che massimizza l'utilità attesa.

Interpretazione:

nello stato con perdita: ricchezza =  $W_0 - L + I - P(I)$

nello stato senza perdita: ricchezza =  $W_0 - P(I)$

- Imponendo la condizione del primo ordine (derivando rispetto ad  $I$ ):

$$dEU = \pi u'[W_1]\{1 - P'(I)\} + (1 - \pi)u'[W_2]\{-P'(I)\} = 0$$

- Il premio è **equo al margine** se pago esattamente il valore atteso del risarcimento:

$$P(I) = \pi I \rightarrow P'(I) = \pi$$

- La condizione diventa:

$$\pi u'[W_1](1 - \pi) + (1 - \pi)u'[W_1](-\pi) = 0$$

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Il problema dell'assicurato è:

$$\max EU = \pi u[W_0 - L + I - P(I)] + (1 - \pi)u[W_0 - P(I)]$$

- Possiamo riscriverlo come:

$$EU(I) = \pi u(W_1(I)) + (1 - \pi)u(W_2(I))$$

$$\frac{dEU}{dI} = \pi u'(W_1) \frac{dW_1}{dI} + (1 - \pi) u'(W_2) \frac{dW_2}{dI}$$

Siccome:  $\frac{dW_1}{dI} = 1 - P'(I)$        $\frac{dW_2}{dI} = -P'(I)$

Allora:

$$\frac{dEU}{dI} = \pi u'(W_1)\{1 - P'(I)\} + (1 - \pi) u'(W_2)\{-P'(I)\}$$

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Il problema dell'assicurato è:

$$u'(W_1) = u'(W_2)$$

Quindi, l'individuo massimizza l'utilità attesa quando:

$$W_1 = W_2$$

- Ossia, l'individuo sceglie la copertura completa, ossia:

$$I = L$$

# La domanda di assicurazioni: massimizzazione dell'utilità attesa

- Esempio. La ricchezza iniziale di un individuo è 100, il danno potenziale è 20 e la sua probabilità è 0.2. La sua funzione di utilità è  $U = \log(W)$ . Considerando un premio equo, quanto sarà il valore del premio (e dell'indennizzo) scelto dall'individuo?