Problema 1

Consegna

Un paese è descritto dal modello di Solow, con una funzione di produzione pari a $y = k^{\frac{1}{2}}$. Supponi che k sia pari a 400. La frazione di output investita sia pari al 50%. Il tasso di ammortamento sia del 5%. Qual è la posizione del paese rispetto al livello di stato stazionario? Mostra cin che maniera hai raggiunto la tua conclusione.

Soluzione

- Le informazioni a disposizione sono le seguenti:
  - Funzione di produzione: $y = k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{k}$;
  - Livello di capitale per addetto: $k = 400$;
  - Tasso di risparmio/investimento: $\gamma = 0.5 = 50\%$;
  - Tasso di deperimento: $\delta = 0.05 = 5\%$;
- Lo stato stazionario si manifesta quando il processo di accumulazione del capitale (rappresentato dalla quota ricchezza per addetto prodotta che viene risparmiata ed investita, ossia l'investimento per lavoratore) compensa esattamente il processo di deperimento del capitale (rappresentato dalla quota dello stock di capitale per lavoratore che viene perduta a causa di usura, obsolescenza, etc.). Formalmente:
  - Investimento per lavoratore: $i = \gamma y = \gamma \underbrace{\sqrt{k}}_{=y}$;
  - Deperimento per lavoratore: $d = \delta k$;
- Calcoliamo i valori precisi per questo esercizio:
  - Investimento per lavoratore: $i = \underbrace{0.5}_{=\gamma} \cdot \underbrace{\sqrt{400}}_{=y} = 0.5 \cdot 20 = 10$;
  - Deperimento per lavoratore: $d = \underbrace{0.05}_{=\delta} \cdot \underbrace{400}_{=k} = 20$;
- Osserviamo quindi che l'investimento in nuovo capitale non è sufficiente a compensare il deperimento di quello esistente, dato che:

  $$\underbrace{i = 10}_{\text{accumulazione}} \quad < \quad \underbrace{20 = d}_{\text{deterioramento}} \quad ,$$

  questo significa che il paese è al di sopra dello stato stazionario, sia in termini di ricchezza per addetto ($y > y^{SS}$), sia in termini di capitale per addetto ($k > k^{SS}$). Secondo il modello di Solow, quindi, questo paese vedrà la riduzione del capitale per addetto, e quindi della ricchezza per addetto, fino a raggiungere lo stato stazionario, dove resterà nel lungo periodo;

- **Aggiunta rispetto alla consegna**. Nello stato stazionario accumulazione e deterioramento del capitale devono equivalersi, cioè:

$$\underbrace{i = \gamma\sqrt{k^{SS}}}_{\text{accumulazione}} = \underbrace{\delta k^{SS} = d}_{\text{deterioramento}},$$

che, con i dati di questo esercizio, diventa:

$$\underbrace{0.5}_{\gamma} \cdot \sqrt{k^{SS}} = \underbrace{0.05}_{\delta} \cdot k^{SS},$$

da cui possiamo ricavare il livello di capitale per addetto nello stato stazionario:

$$\sqrt{k^{SS}} = \frac{0.05}{0.5} k^{SS},$$

$$k^{SS} = (0.1)^2 \left(k^{SS}\right)^2,$$

$$k^{SS} - 0.01 \left(k^{SS}\right)^2 = 0,$$

$$k^{SS} \left(1 - 0.01 k^{SS}\right) = 0,$$

le cui soluzioni sono $k^{SS} = 0$, matematicamente ammissibile ma priva di significato economico, e $k^{SS} = \frac{1}{0.01} = 100$;

- Nello stato stazionario il livello di capitale per addetto è $k^{SS} = 100$, da cui ricaviamo la ricchezza per addetto associata, utilizzando la funzione di produzione:

$$y^{SS} = \sqrt{k^{SS}} = \sqrt{100} = 10.$$

Problema 3

Consegna

Nel paese 1 il tasso di investimento è del 5% e nel paese 2 è del 20%. I due paesi hanno lo stesso livello di produttività, A, e lo stesso tasso di ammortamento δ. Assumendo che il valore di α sia pari a 1/3, qual è il rapporto tra i livelli di produzione in stato stazionario dei due paesi? Come varierebbe lo stesso rapporto se $\alpha = 2/3$?

Soluzione

- Le informazioni a disposizione sono le seguenti:
  - Funzione di produzione Cobb-Douglas;
  - Tasso di risparmio/investimento nei due paesi: $\gamma_1 = 0.05 = 5\%$ e $\gamma_2 = 0.20 = 20\%$;
  - Tasso di deperimento identico nei due paesi: $\delta_1 = \delta_2 = \delta$;

- Livello di produttività identico nei due paesi: $A_1 = A_2 = A$;
- Quota di output attribuita al capitale: $\alpha = \frac{1}{3}$;

- Ricordiamo che in corrispondenza dello stato stazionario, in generale l'output per addetto di un'economia è:

$$y^{SS} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

quindi il rapporto dell'output nei due paesi è il rapporto della grandezza sopra calcolata con i valori specifici dei due paesi:

$$\frac{y_1^{SS}}{y_2^{SS}} = \frac{\cancel{A^{\frac{1}{1-\alpha}}} \left(\frac{\gamma_1}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\cancel{A^{\frac{1}{1-\alpha}}} \left(\frac{\gamma_2}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \frac{(\gamma_1)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\cancel{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}} \cdot \frac{\cancel{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}}{(\gamma_2)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}};$$

- Utilizzando i valori dell'esercizio otteniamo:

$$\frac{y_1^{SS}}{y_2^{SS}} = \left(\frac{0.05}{0.20}\right)^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}} = 0.25^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}} = \sqrt{0.25} = 0.5,$$

quindi il rapporto tra la ricchezza per addetto del primo paese rispetto al secondo è pari a 0.5, cioè il primo paese è ricco la metà del secondo in termini di ricchezza per addetto (alternativamente, il secondo paese è ricco il doppio). Dato che tutti i parametri sono identici, la differenza di ricchezza nello stato stazionario dipende unicamente dalla differente capacità di risparmio nelle due economie;

- Se la quota di output attribuita al capitale, o equivalentemente l'elasticità dell'output rispetto al capitale, fosse $\alpha = \frac{2}{3}$, otterremmo:

$$\frac{y_1^{SS}}{y_2^{SS}} = \left(\frac{0.05}{0.20}\right)^{\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}} = 0.25^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1}} = 0.25^2 = 0.0625,$$

quindi il primo paese è ricco un sedicesimo del secondo. L'interpretazione economica è la seguente: se nelle due economie il ruolo del capitale è più rilevante rispetto al caso precedente, quindi chi ha minore capacità di risparmio viene, a parità di altre condizioni, penalizzato maggiormente (le differenze indotte dai tassi di risparmio si amplificano).