Capitolo ottavo
L'OMOLOGIA

1. Prospettività tra stelle

Siano assegnate due stelle (cap. IV, n. 2) i cui centri O ed O′ siano punti dello spazio proiettivo. Fissato un piano α non passante per O né per O′, sia f la corrispondenza tra le due stelle nella quale sono associate una retta di (O) e una retta di (O′) (un piano di <O> e un piano di <O′>) che si intersecano in un punto di α (in una retta di α) (fig. 1)[1].

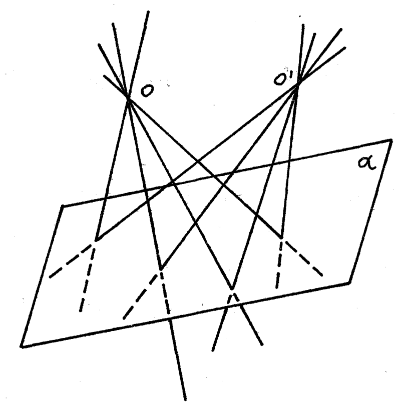

Fig. 1

La corrispondenza f dicesi *prospettività tra le stelle* di centri O, O′; il piano α dicesi *piano della prospettività f*, e le due stelle diconsi *prospettive* rispetto ad α.

Si osservi che la prospettività tra due stelle si ottiene dalla prospettività tra due piani prospettivi, mediante applicazione del *principio di dualità* nello spazio (cfr. cap. V).

Infatti le figure:

F : costituita dall'insieme dei punti e delle rette che *stanno su un piano* proiettivo;

F^d : costituita dall'insieme dei piani e delle rette che *passano per un punto* proiettivo,

sono figure duali nello spazio.

[1] Se O ≡ O′, la prospettività si riduce all'identità tra le stelle. Escludiamo, nel seguito, tale caso banale.

Inoltre le proprietà:

1. due punti corrispondenti *stanno su una retta* che *passa per un punto* O (il centro della prospettività),

2. due rette corrispondenti *stanno su un piano* che *passa per il punto* O,

caratterizzanti la prospettività tra piani, sono rispettivamente duali (nello spazio) delle proprietà

1^d. due piani corrispondenti *passano per una retta* che *sta su un piano* α (il piano di prospettività),

2^d. due rette corrispondenti *passano per un punto* che *sta sul piano* α,

caratterizzanti la prospettività tra stelle.

2. Relazioni tra la sezione di due stelle prospettive e l'omologia di ribaltamento. L'omologia.

2.1. - Sia f una prospettività tra le stelle di centri O ed O$'$, e sia α il piano di tale prospettività. Secando le stelle con un piano σ, che non contenga O né O$'$, si determina nell'insieme dei punti (e delle rette) di σ una corrispondenza ω nella quale restano associati i punti A$'$, A* (le rette a', a^*) di σ, intersezioni con σ di due rette (di due piani) rispettivamente di (O) ed (O$'$) (di <O> ed <O$'$>), corrispondenti in f (fig. 2). Se $\sigma \equiv \alpha$, la corrispondenza ω si riduce all'identità sul piano σ, cioè ogni punto (ogni retta) di σ è corrispondente di se stesso (di se stessa) in ω.

Se ω non è l'identità su σ, ω si dice *sezione* delle due stelle prospettive di centri O, O$'$, rispettivamente.

Il piano σ viene indicato con α' quando si considera come l'insieme dei punti e delle rette ottenuti secando la stella di centro O; con α^*, quando si considera come l'insieme dei punti e delle rette ottenuti secando la stella di centro O$'$.

Dimostriamo che la corrispondenza ω è una omografia tra i piani

sovrapposti α, α^*.

Infatti, se ω_1 è la prospettività di centro O tra i piani α' ed α, e se ω_2 è la prospettività di centro O$'$ tra i piani α ed $\alpha^* \equiv \alpha'$, allora la corrispondenza ω risulta il prodotto di ω_1 e ω_2. Infatti (fig. 2) al punto A$'$ di α' corrisponde, mediante ω_1, la sua proiezione A da O su α; ad A corrisponde in ω_2 la sua proiezione da O$'$ su α^*, cioè il punto A*, che risulta dunque il corrispondente in ω di A$'$.

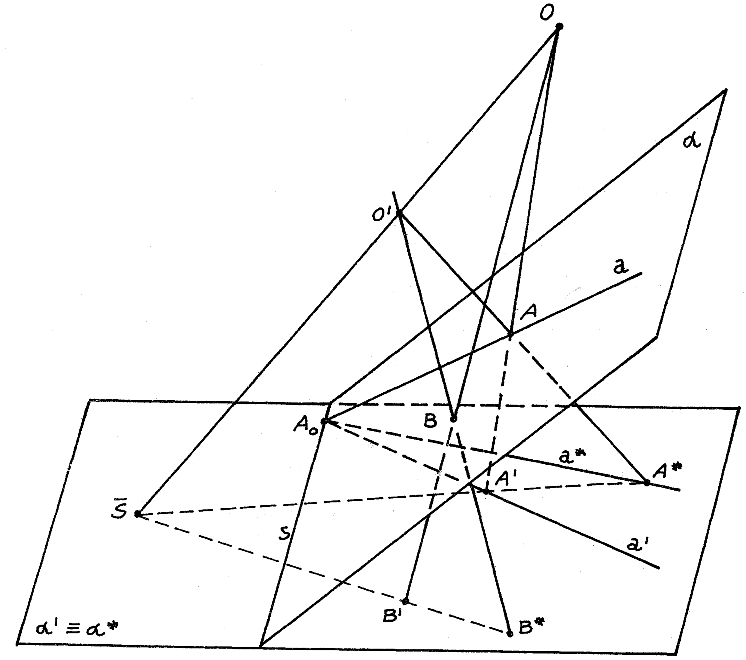

Fig. 2

Determiniamo ora l'insieme dei punti uniti in ω.

Si vede subito che i punti della retta s, comune ai piani σ ed α, costituiscono un insieme di punti uniti in ω. Ne consegue che se F' è una figura, proiezione della figura F dal punto O sul piano α' e contenente una parte della retta s, la figura F^* corrispondente in ω contiene la stessa parte di s. In particolare vale la proprietà formalmente identica alla prima proprietà dell'omologia di ribaltamento (cfr. cap. VII),

1. *Rette corrispondenti in ω si intersecano in un punto della retta s.*

Proviamo ora che esiste un altro punto unito in ω. Questo è il punto $\bar{S}$ di α' che sta sulla retta OO'.

Infatti $\bar{S}$ è simultaneamente la proiezione da O e da O' del punto S, comune alla retta OO' e al piano α. Si ha, di conseguenza, che ogni retta a di α, che passi per S e per il punto A_0 della retta s, è proiettata rispettivamente da O e da $\bar{O'}$ nelle rette a' ed a^*, sovrapposte perché passanti entrambe per i punti $\bar{S}$ ed A_0. Ed allora sulla retta $a' \equiv a^*$ vanno a cadere i punti A' ed A* proiezioni da O e O' dei punti A della retta a. Se ne conclude che vale l'ulteriore proprietà

2. *Punti corrispondenti in ω sono allineati col punto* $\bar{S}$.

Anche questa proprietà è formalmente identica alla seconda proprietà dell'omologia di ribaltamento.

Il punto $\bar{S}$ è evidentemente un punto unito per l'omologia ω; infatti, poiché punti corrispondenti in ω sono allineati con $\bar{S}$, le rette per $\bar{S}$ sono unite (anche se non sono insiemi di punti uniti, in generale). Dunque $\bar{S}$ poiché sta su rette unite, ha come corrispondente se stesso.

Non esistono punti uniti in ω che non siano i punti della retta s o il punto $\bar{S}$. Invero, se H fosse un punto di α, distinto da S e non appartenente ad s, proiettato su α' da O e O' in $H' \equiv H^*$, allora le rette OH' e O'H* si incontrerebbero in H e in $H' \equiv H^*$. Essendo $H \not\equiv H'$ le rette OH' e O'H* coinciderebbero con la retta OO', contro l'ipotesi secondo cui H non coincide con S.

Si definisce *omologia* un'omografia tra due piani sovrapposti α' ed α^* tale che esistano in $\alpha' \equiv \alpha^*$: un punto $\bar{S}$, detto *centro* dell'omologia, e una retta s, detta *asse* dell'omologia, soddisfacenti le proprietà 1. e 2.

Un'omologia tale che il centro $\bar{S}$ è sull'asse s dicesi *omologia speciale.* Nella fig. 2_a sono rappresentate coppie di punti (A', A*), (B', B*), (C', C*), corrispondenti in un'omologia speciale.

Il punto A' e il punto A* diconsi *omologhi; omologhe* diconsi due figure corrispondenti in un'omologia.

Vale dunque il

Teorema 1. *Ogni sezione di due stelle prospettive è un'omologia.*

Dimostriamo ora il seguente

Teorema 2. *Ogni omologia ω tra i piani sovrapposti α' ed α^* avente per asse una retta s, può ottenersi proiettando su α', da un conveniente centro, e ribaltando sul piano α^* i punti di un piano α che interseca $\alpha^* \equiv \alpha'$ in s.*

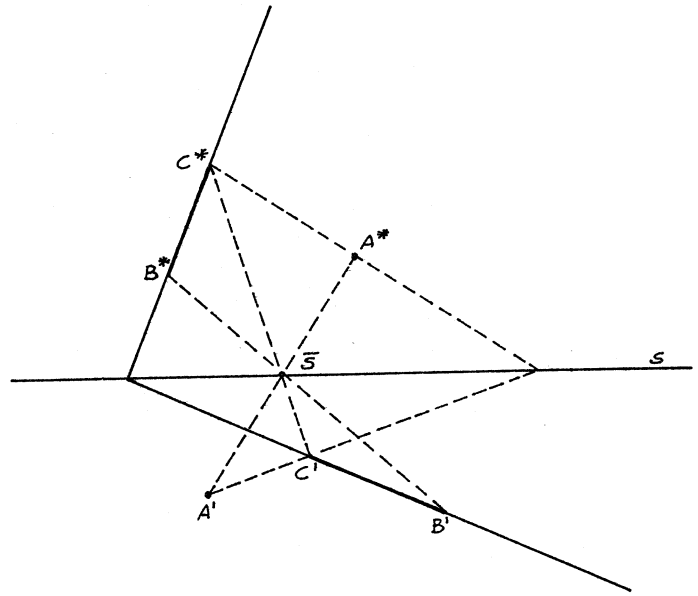

Fig. 2 a

Infatti, data sul piano $\alpha' \equiv \alpha^*$ un'omologia ω di asse s (fig. 3), in cui (A', A*) e (B', B*) sono due coppie di punti corrispondenti (gli elementi di ciascuna coppia sono allineati con $\bar{S}$), vogliamo dimostrare che l'omologia ω coincide con un'opportuna omologia ρ di ribaltamento.

Condotto per s un piano α, si ribalti α^* su α; i punti A* e B* si ribaltano rispettivamente in due punti A e B di α, e la retta AB, ribaltata di A*B*, interseca s nel punto V_0, comune alle rette A'B' e A*B*, corrispondenti in ω; dunque le rette AB e A'B' sono complanari e il piano da esse individuato contiene anche le rette AA' e BB': queste ultime, essendo complanari, s'incontrano in un punto O (eventualmente improprio) dello spazio.

Allora il punto A (il punto B) di α risulta simultaneamente proiezione di A' (di B') da O, e ribaltato di A* (di B*) nel ribaltamento di α^* su α. Ma si può anche affermare che i punti A' e A* (B' e B*) sono rispettivamente proiezione da O e ribaltato, nel ribaltamento di α su α^*, di uno stesso punto A (punto B) di α.

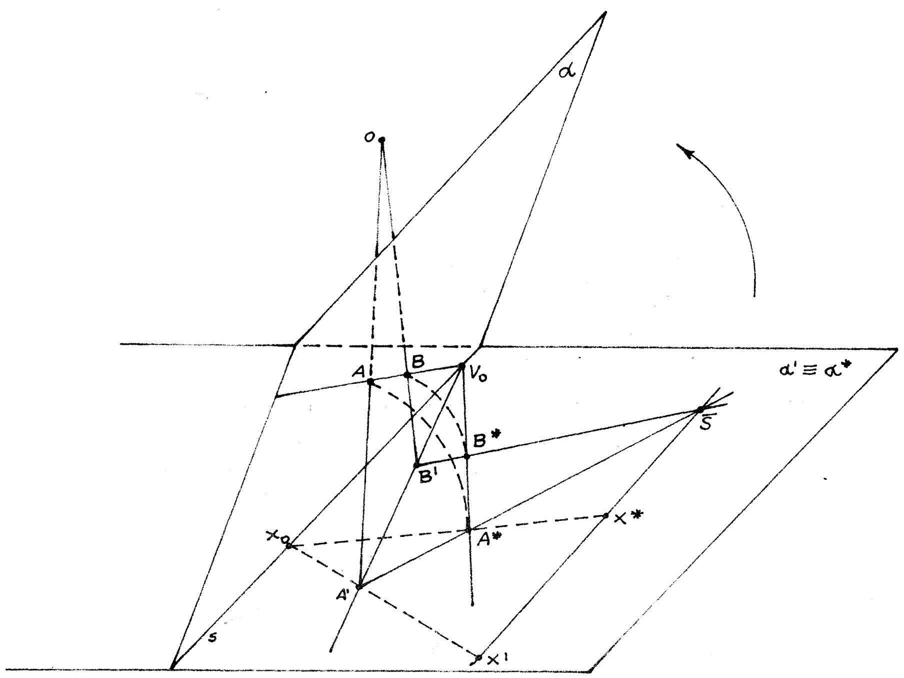

Fig. 3

Dunque il punto A' (punto B') ha come corrispondente sia nella omologia ω data, che nell'omologia ρ di ribaltamento ora costruita, lo stesso punto A* (punto B*).

Per completare la dimostrazione del teorema occorre inoltre mostrare che una coppia (X', X*) di punti corrispondenti in ω è ancora una coppia di punti corrispondenti in ρ. A questo scopo si osservi che le rette A'A* e B'B* sono unite sia in ω che in ρ e dunque il punto $\overline{S}$ comune alle due rette è unito anche in ρ. Faremo ora vedere che se $\overline{X}^*$ è l'omologo di X' in ρ, allora è necessariamente $\overline{X}^* \equiv X^*$. Infatti i punti X* e $\overline{X}^*$ sono entrambi sulla retta $\overline{S}X'$ poiché coppie di punti corrispondenti, in ω o in ρ, sono allineate con $\overline{S}$; inoltre detto X_0 il punto comune alla retta X'A' e all'asse s dell'omologia ω, i punti X* e $\overline{X}^*$ appartengono entrambi alla retta X_0A^*, omologa di X'A' in ω e in ρ. Dunque X* e $\overline{X}^*$, appartenenti simultaneamente a due rette distinte ($\overline{S}X'$ e X'A*), coincidono.

Teorema 2'. *Ogni omologia può essere interpretata come un'opportuna omologia di ribaltamento.*

Detta ω una sezione di due stelle prospettive, restano dunque dimostrate le seguenti implicazioni:

(ω è una sezione di stelle prospettive) $\Rightarrow$ (ω è una omologia) $\Rightarrow$ (ω è una omologia di ribaltamento).

2.2. Procediamo ora nella dimostrazione delle implicazioni inverse, allo scopo di identificare l'insieme delle sezioni di stelle prospettive, l'insieme delle omologie e l'insieme delle omologie di ribaltamento.

A tal fine basterà dimostrare che ogni omologia di ribaltamento è sezione di due opportune stelle prospettive[2].

Ed invero si osservi che il ribaltamento di un piano α su un piano α^* è una prospettività il cui centro è il punto improprio R_∞ ortogonale al piano bisettore β_1 del diedro attraversato nel ribaltamento di α su α^* (fig. 4a): il ribaltato P* del punto P di α è il simmetrico di P rispetto a β_1 nella direzione R_∞.

Dunque *ogni omologia di ribaltamento è sezione di due stelle prospettive, uno dei cui centri è improprio* (fig. 4_b).

[2] Infatti, se $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ sono n proposizioni tali che $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_n$ e se $P_n \Rightarrow P_1$ si avrà:

$$P_1 \Longleftrightarrow P_2 \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow P_n ,$$

cioè l'equivalenza delle n proposizioni.

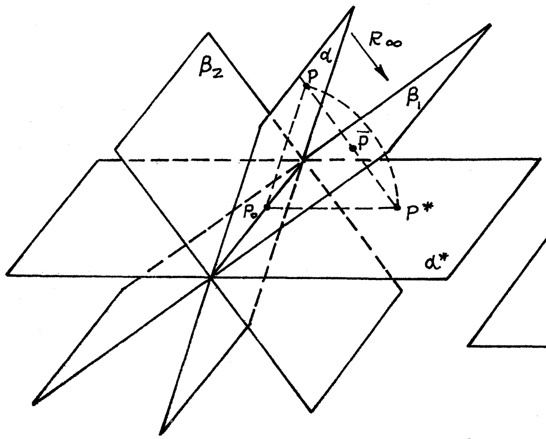

Fig. 4a

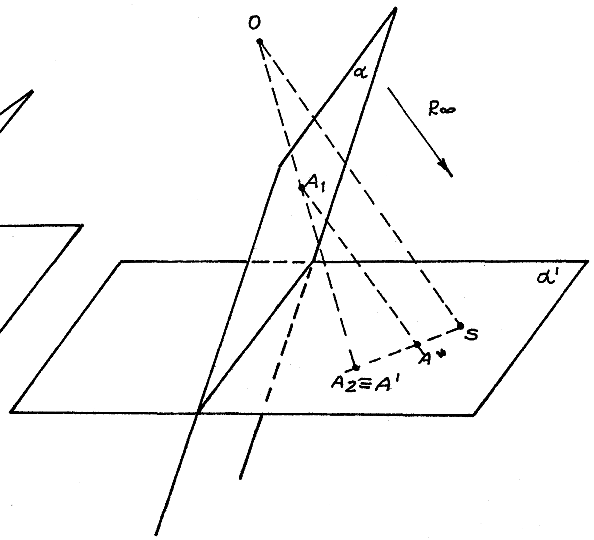

Fig. 4b

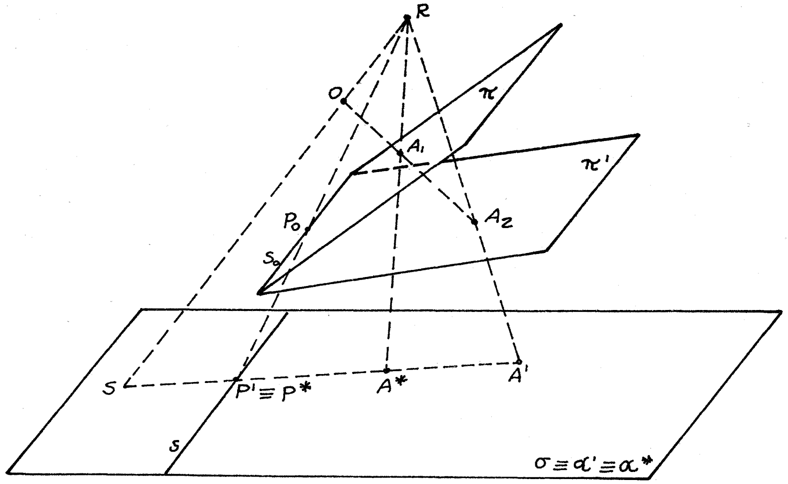

Fig. 5

Risulta dunque dimostrata l'implicazione, che conclude il n. precedente, e con essa l'equivalenza delle seguenti proposizioni:

P_1: *la corrispondenza ω è una sezione di due stelle prospettive;*
P_2: *la corrispondenza ω è una omologia;*
P_3: *la corrispondenza ω è una omologia di ribaltamento.*

Nel seguito identificheremo le espressioni *omologia* e *omologia di ribaltamento.*

Dalle esposte equivalenze si deduce che ogni omologia è il prodotto di una prospettività e di un'affinità, cioè della prospettività dal centro O e della proiezione parallela nella direzione R_∞.

3. Proiezione di piani prospettivi e omologia

Poiché la prospettività tra due stelle e la prospettività tra due piani sono corrispondenze duali, è possibile ottenere un'omologia oltre che mediante *sezione* di stelle prospettive, anche mediante *proiezione* di piani prospettivi.

Più precisamente, sono corrispondenti in un'omologia le proiezioni da un punto R su un piano σ di due figure piane dello spazio che siano l'una proiezione dell'altra da un punto O.

Siano infatti π e π' (fig. 5) due piani distinti e sia ω_0 la prospettività di centro O che associa A_1 di π ad A_2 di π'; sia R un altro punto né su π né su π', e σ un piano non passante per R né per O. Indichiamo con ω la corrispondenza che associa i punti A' ed A*, proiezioni da R su σ della coppia di punti (A_2, A_1), corrispondenti in ω_0^{-1}, inversa di ω_0.

Detto α' o α^* il piano σ, secondo che sia insieme delle proiezioni da R dei punti di π', oppure di π, la corrispondenza ω è una omografia tra i piani sovrapposti α' ed α^*. Infatti indicate con

ω_1 la prospettività dal centro R tra i piani α' e π',
ω_2 la prospettività dal centro R tra i piani π ed α^*,

la corrispondenza ω risulta essere la funzione composta mediante le prospettività ω_1, ω_0^{-1}, ω_2.

Ad esempio, dal punto A' di α' si ottiene A^* di α^* mediante le operazioni:

proiezione di A' da R su π' in A_2,
proiezione di A_2 da O su π in A_1,
proiezione di A_1 da R su α^* in A^*.

Cioè, in simboli:

$$\omega_1 : A' \in \alpha' \to A_2 \in \pi',$$
$$\omega_0^{-1} : A_2 \in \pi' \to A_1 \in \pi,$$
$$\omega_2 : A_1 \in \pi \to A^* \in \alpha^*.$$

La corrispondenza ω è dunque un'omografia, evidentemente distinta dall'identità.

Essa soddisfa, inoltre, le proprietà 1 e 2 del n. 2.1.: infatti esiste nel piano $\alpha' \equiv \alpha^*$ una retta che è insieme di punti uniti in ω (la retta s, proiezione da R della retta s_0 comune ai piani π e π'), e un punto unito in ω (il punto S comune alla retta OR e al piano $\alpha' \equiv \alpha^*$). La corrispondenza ω è dunque un'omologia di asse s e centro S.

4. Invariante assoluto o caratteristica dell'omologia

Verifichiamo ora che, se ω è una omologia tra i piani (sovrapposti) α', α^*, il birapporto $(A'A^*SA_0)$[3] formato da una coppia di punti corrispondenti in ω, dal centro dell'omologia S e dal punto A_0, comune alla retta $A'A^*$ ed all'asse s, non muta al variare della coppia di punti corrispondenti.

Sia, infatti, (B', B^*) un'altra coppia di punti corrispondenti in ω (fig. 6) non allineati con A', A^*[4], detto B_0 il punto di intersezione della retta $B'B^*$ con l'asse s per l'invarianza proiettiva del birapporto, risulta

[3] Da ora in avanti indicheremo semplicemente con S il centro dell'omologia.
[4] Se (B', B^*) è una coppia di punti corrispondenti in ω, dalle proprietà 1., 2. del n. 2.1. consegue che le rette $A'B'$ ed A^*B^* si intersecano in un punto $P_0 \in s$ ed i punti B', B^* sono allineati con S.

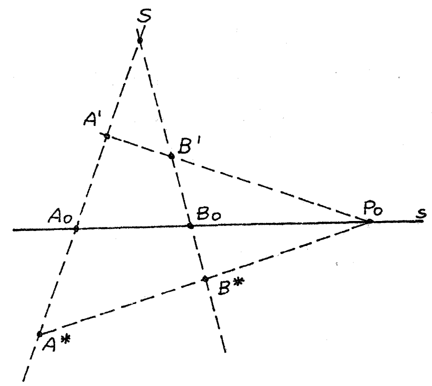

Fig. 6

(cfr. cap. II):

$$(A'A^*SA_0) = (B'B^*SB_0). \quad (1)$$

Infatti le due quaterne di punti allineati si possono considerare l'una proiezione dell'altra dal punto P_0.

Se i punti B', B^* sono allineati con A', A^*, per la dimostrazione della (1), si ricorre ad una ulteriore coppia C', C^* di punti corrispondenti, non allineati con A' ed A^* (fig. 7).

Il birapporto (1), che non dipende dalla scelta dei punti corrispondenti in ω, dicesi *invariante assoluto* o *caratteristica* dell'omologia.

Analogamente, il birapporto:

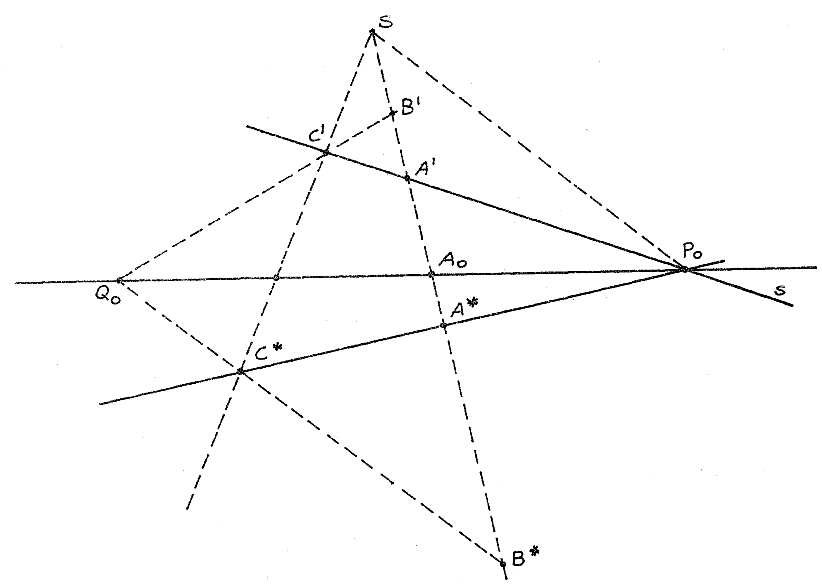

Fig. 7

$$(a'a^*\bar{a}s)$$

costituito da una coppia di rette (a', a^*) corrispondenti in ω, dalla retta $\bar{a}$ (passante per il centro S e per il punto P_0 di intersezione delle rette a', a^*) e dall'asse s, è invariante al variare della coppia prescelta.

Infatti, se (b, b^*) è un'altra coppia di rette corrispondenti in ω (fig. 8), risulta:

$$(a'a^*\bar{a}s) = (A'A^*SA_0) = (b'b^*\bar{b}s) \; . \qquad (2)$$

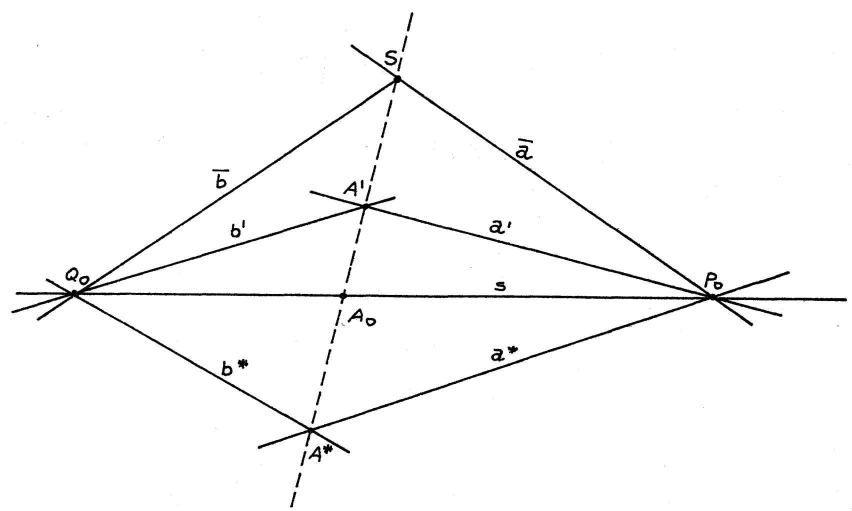

Fig. 8

5. Costruzione di un'omologia

Allo scopo di costruire sul piano α^* la figura corrispondente di una figura assegnata del piano α', dimostriamo il seguente

Teorema. *Dati un punto* S, *una retta s ed una coppia di punti* (A', A*), *allineati con* S, *(distinti da* S *e non appartenenti ad s), esiste un'omologia*

ω, ed una soltanto, avente asse s, centro S, *nella quale* (A', A*) *è una coppia di punti corrispondenti.*

Supponiamo, in primo luogo, che S non appartenga ad s e che ω sia un'omologia soddisfacente tutte le condizioni richieste.

Sia B' un qualunque punto che non sta sulla retta A'A*, né su s (fig. 6); detto P_0 il punto di intersezione della retta A'B' con s, il punto B*, corrispondente in B', sta sulla retta A^*P_0, ed inoltre è allineato con S e B' (per le proprietà 1. e 2. del n. 2). Dunque B* è l'intersezione di due rette, A^*P_0 ed SB', univocamente individuate dai dati. Ed allora B* è univocamente determinato per ogni punto B' che non sta sulla retta SA'. Ma, scambiando i ruoli delle coppie (A', A*), (B', B*) e ripetendo i ragionamenti, possiamo dedurre che l'omologia ω, avente asse s, centro S e coppia di punti corrispondenti (A', A*) esiste ed è unica.

Il teorema sussiste anche se S appartiene ad s e la dimostrazione si ottiene in modo analogo.

L'omologia ω, per quanto detto, può anche indicarsi con:

$$\omega \equiv (S, s; A', A^*) \; .$$

Data l'omologia $\omega \equiv (S, s; A', A^*)$, dalla dimostrazione del teorema precedente consegue la costruzione del corrispondente B* d'un qualunque punto B' del piano α'.

Osserviamo dunque che un'omologia è determinata quando siano assegnati: il centro S, l'asse s, ed una coppia (A', A*) di punti corrispondenti. Un'omologia è ugualmente determinata quando si sia assegnato: il centro S, l'asse s ed una coppia (a', a^*) di rette corrispondenti; infatti, la sezione delle due rette a', a^* con una retta qualunque per S individua, su a' e a^*, una coppia (A', A*) di punti corrispondenti nell'omologia (fig. 9).

Osserviamo che l'espressione: *costruire una omologia ω* vale: *individuare la corrispondente in ω di una qualunque figura del piano α'.*

Per costruire un'omologia è sufficiente, come si è visto, conoscerne il centro, l'asse ed una coppia di elementi (punti o rette) corrispondenti.

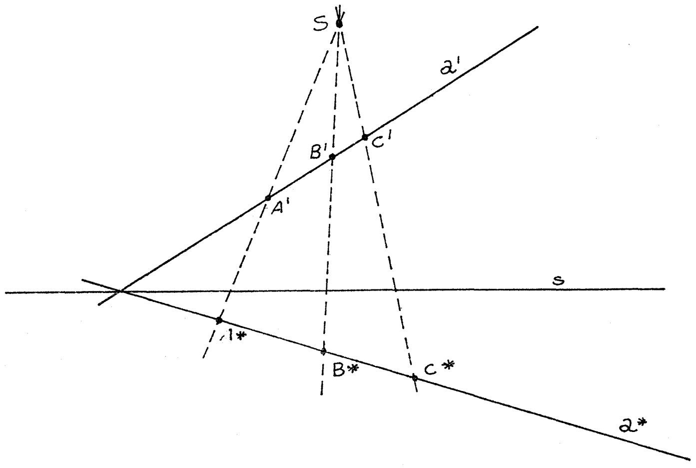

Fig. 9

6. Rette limiti di un'omologia

Data nel piano $\alpha' \equiv \alpha^*$ un'omologia $\omega \equiv (\mathrm{S}, s, \mathrm{A}', \mathrm{A}^*)$, consideriamo la retta impropria h'_∞ del piano α': in generale, essa ha come corrispondente in ω nel piano α^* una retta propria h^*, che dicesi *retta limite* di α^* (cfr. cap. VI, n. 1); detta k^*_∞ la retta impropria di α^* (che, per essere $\alpha^* \equiv \alpha'$, coincide con h'_∞), l'omologa in ω^{-1} di k^*_∞ nel piano α' è una retta k', generalmente propria e distinta da h^*, che dicesi *retta limite* di α'.

Per determinare una o entrambe le rette limiti dell'omologia ω, basta costruire di ciascuna di esse un solo punto proprio: infatti la retta h^* (la retta k') e l'omologa h'_∞ (k^*_∞) s'intersecano sull'asse s in un punto che, per appartenere alla retta $h'_\infty \equiv k^*_\infty$, è improprio e dunque è il punto improprio di s; la retta limite h^* di α^* (k' di α') risulta allora parallela ad s. L'ulteriore punto (proprio) di ciascuna retta limite, sufficiente per individuarla, si può determinare quale omologo di un qualsiasi punto della retta impropria.

Ad esempio, scelto il punto improprio I'_∞, appartenente alla retta impropria h'_∞ di α' e distinto dal punto improprio dell'asse s, l'omologo

I^* si determina costruendo la retta $\mathrm{A}'\mathrm{I}'_\infty$ e la corrispondente $\mathrm{P}_0\mathrm{A}^*$: il punto I^* cade nell'intersezione delle rette $\mathrm{P}_0\mathrm{A}^*$ ed SI'_∞. La retta h^* è la parallela all'asse condotta per I^* (fig. 10).

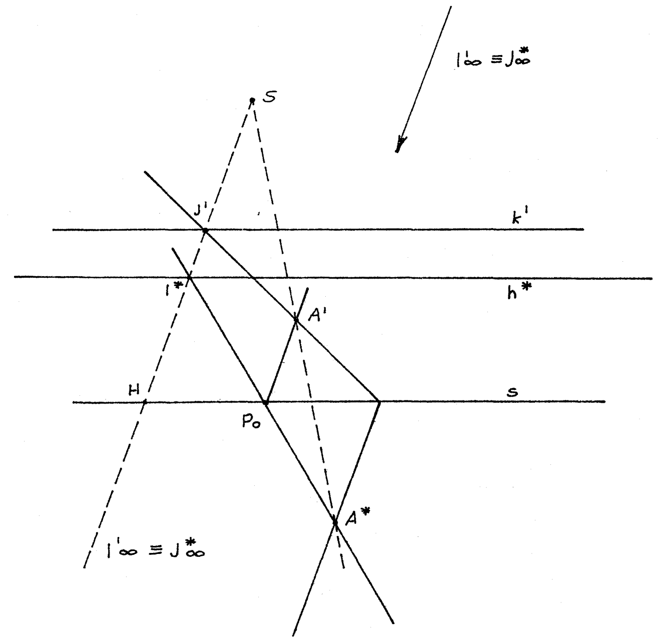

Fig. 10

L'altra retta limite k' si determina in maniera analoga, scegliendo un punto J^*_∞ di k^*_∞ (eventualmente coincidente con I'_∞) e determinandone l'omologo J', nell'omologia inversa ω^{-1}.

Allo scopo di dimostrare una proprietà delle rette limiti (di una omologia) che, nota una, consente di determinare l'altra, premettiamo la seguente definizione.

Dicesi *striscia* individuata dalle rette parallele e distinte a e b del loro piano, la parte di piano comune al semipiano d'origine a contenente b e al semipiano d'origine b contenente a.

L'annunciata proprietà è espressa dal seguente

Teorema. *Le rette limiti d'una omologia ω non speciale sono entrambe* *interne o entrambe esterne alla striscia individuata dall'asse s e dalla parallela all'asse condotta per il centro S. La distanza di ciascuna di esse dal centro è uguale alla distanza dell'altra dall'asse.*

Infatti, sia a' una retta del piano α' e sia a^* la corrispondente in ω (figg. $11_{a,\,b}$). Le rette $\overline{a}'$ed $\overline{a}^*$ parallele ad a' ed a^*, rispettivamente, passanti per il centro S di ω secano a^* ed a' nei punti H* e K', rispettivamente. Per quanto visto al n. 5, il punto corrispondente in ω al punto K' si determina osservando in primo luogo che esso è allineato con S e con K' e che, inoltre, essendo K' su a', il suo corrispondente è su a^*. Poiché la retta SK' è parallela alla retta a^* esso è allora il punto improprio K^*_∞ della retta a^*. Analogamente si prova che il punto improprio H'_∞ della retta SH* ha come corrispondente in ω il punto H*. Allora le rette limiti di ω sono le rette k' ed h^* parallele ad s passanti per K' ed H*, rispettivamente. Detto dunque A il punto comune alle rette a' ed a^*, l'enunciato risulta immediato osservando che i punti A, H*, S, K' sono i vertici di un parallelogramma.

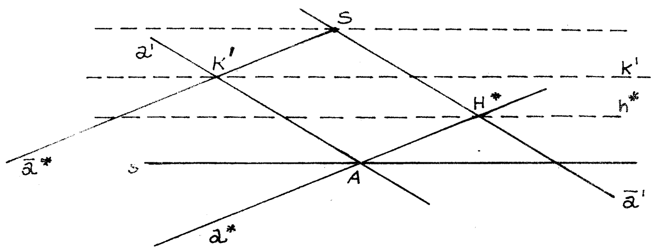

Fig. 11 a

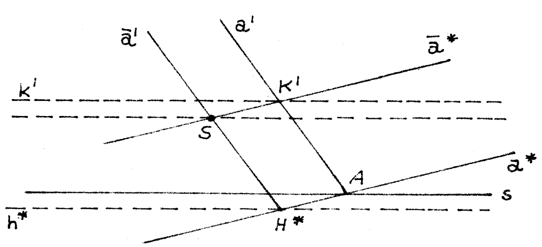

Fig. 11 b

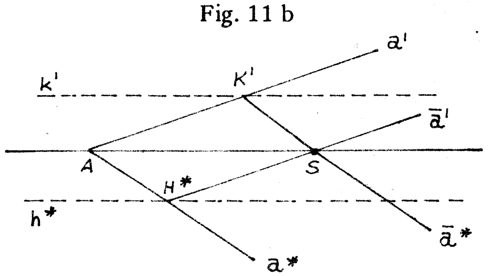

Fig. 11 c

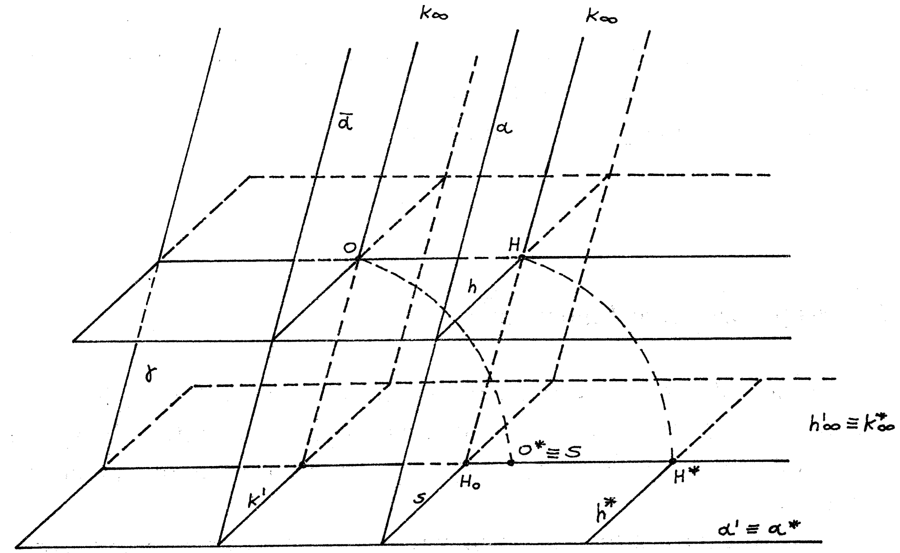

Fig. 11 d

Osserviamo che se ω è una omologia speciale, cioè S è sull'asse s, allora le rette limiti sono equidistanti dall'asse (fig. 11_c).

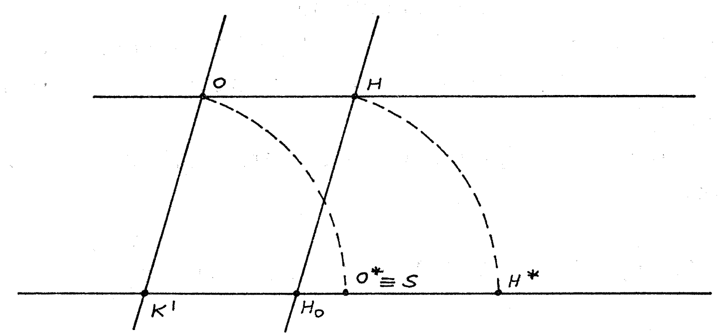

Fig. 11 e

La fig. 11_d mostra la posizione nello spazio degli elementi caratteristici d'una omologia di ribaltamento.

Il piano della fig. 11_e è il piano γ.

7. Casi particolari dell'omologia

Se accade che la retta impropria di α' e quella di α^* (che evidentemente coincidono) costituiscono una coppia di rette corrispondenti nell'omologia ω, se cioè $h'_\infty \equiv h^*_\infty$, la retta impropria del piano risulta unita in ω.

L'omologia è allora un'*affinità* (cfr. cap. VI, 2) tra i piani sovrapposti $\alpha' \equiv \alpha^*$ e le rette limiti dell'omologia coincidono evidentemente con la retta impropria.

Poiché le sole rette unite in ω sono l'asse s e le rette del fascio (S), si può verificare, se ω è un'affinità, almeno uno dei seguenti casi:

1. la retta impropria $h'_\infty \equiv h^*_\infty$ passa per il centro,
2. la retta impropria $h'_\infty \equiv h^*_\infty$ coincide con l'asse.

Nel primo caso il centro dell'omologia, appartenendo alla retta impropria, è un punto improprio S_∞ e l'omologia viene denominata *affinità omologica* oppure *omologia affine.* La retta impropria del piano risulta unita, in quanto appartiene al fascio (S_∞) di rette unite, ma non costituisce necessariamente un insieme di punti uniti.

In un'omologia affine $\omega \equiv (S_\infty,\ s;\ A',\ A^*)$ le coppie di punti omologhi (allineati con S_∞) appartengono evidentemente a rette tra loro parallele (fig. 12).

Inoltre, detto A_0 il punto in cui la retta $A'A^*$ seca s, l'invariante dell'omologia è:

$$(S_\infty A_0 A' A^*) = (A^* A' A_0 S_\infty) = (A^* A' A_0) = \frac{A^* A_0}{A' A_0}$$

Dunque, in un'affinità omologica è costante il rapporto delle distanze di due (qualunque) punti omologhi dall'asse.

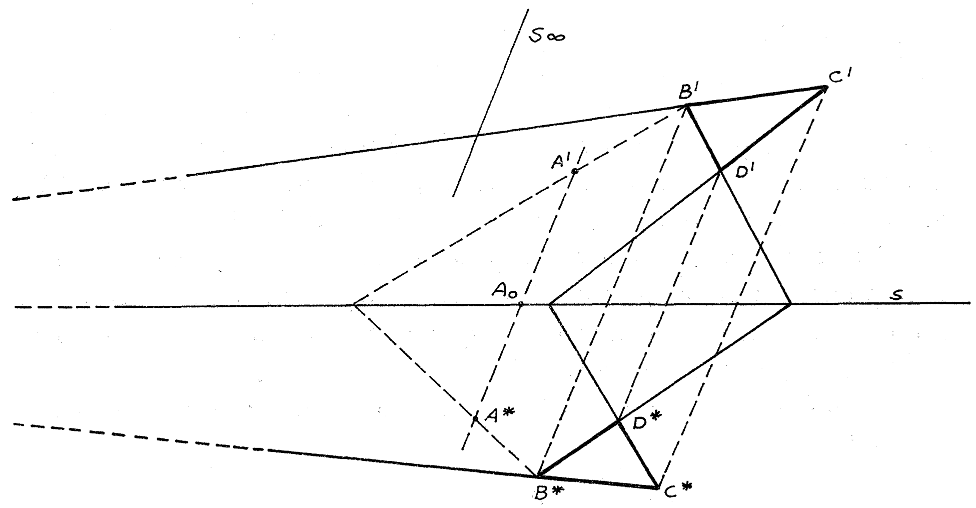

Fig. 12

Ma se accade che $A'A_0 = A_0A^*$, poiché tale proprietà si conserva per tutte le coppie di punti omologhi, l'affinità prende il nome di *simmetria* rispetto all'asse s, nella direzione S_∞ e l'invariante dell'omologia vale

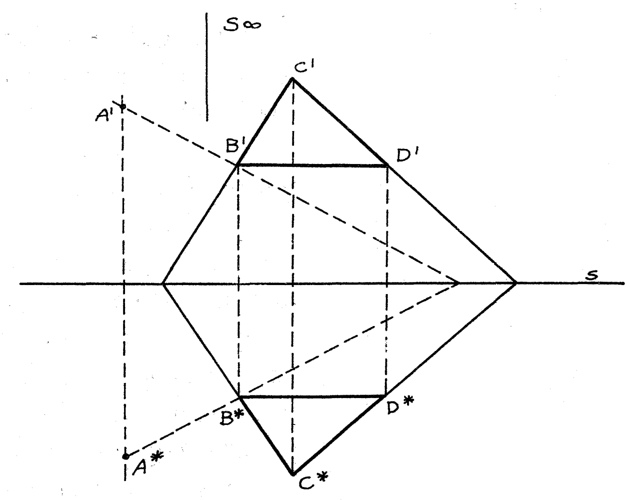

Fig. 13

-1; se la direzione S_∞ è ortogonale all'asse, l'omologia prende il nome di *affinità omologica ortogonale* (fig. 13); e se è inoltre $A'A_0 = A_0A^*$, l'affinità diviene una *simmetria ortogonale* rispetto ad s.

Nel secondo caso, in cui cioè la retta impropria (unita) coincide con l'asse, ma non passa per il centro, l'affinità prende il nome di *omotetia*; la retta impropria risulta un insieme di punti uniti in quanto asse della omologia, dunque l'omotetia è una *similitudine* (cfr. IV, 3).

Rette omologhe, intersecandosi in un punto dell'asse evidentemente improprio, risultano parallele (fig. 14); inoltre i segmenti corrispondenti sono proporzionali, gli angoli corrispondenti sono uguali, quindi ogni cerchio si muta ancora in un cerchio.

Se infine (A', A^*), (B', B^*), ... sono coppie di punti corrispondenti in ω si ha:

$$\frac{A'S}{A^*S} = \frac{B'S}{B^*S} = \ldots = \text{costante}\,.$$

Infatti, essendo improprio il punto comune all'asse e alla retta $A'A^*$, si ha:

$$(SA_{0\infty}A'A^*) = (A'A^*SA_{0\infty}) = (A'A^*S) = \frac{A'S}{A^*S}\,.$$

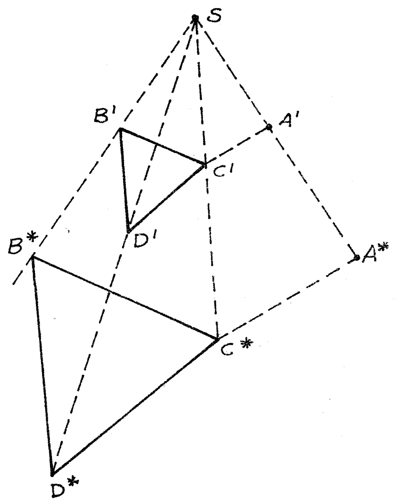

Fig. 14

Dunque, in un'omotetia il rapporto delle distanze di due (qualsiasi) punti omologhi dal centro è costante, e prende il nome di *rapporto di omotetia.*

Un'omotetia è determinata quando siano assegnati: il centro S e una coppia di punti omologhi A', A^* (allineati con S). Se A',A^* appartengono alla stessa semiretta di origine S, l'omotetia si dice *diretta* (fig. 14) e il rapporto di omotetia è positivo; altrimenti, *inversa* (fig. 15), e il rapporto è

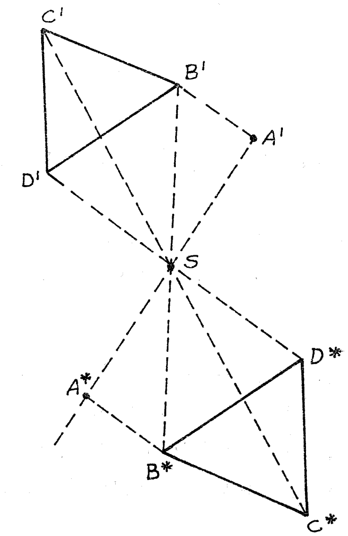

Fig. 15

negativo. Se infine in un'omotetia inversa risulta $A'S = SA^*$, l'omotetia diviene una *simmetria* rispetto al punto S e il rapporto di omotetia vale -1.

Qualora si verifichino simultaneamente i casi 1. e 2., l'affinità è anche un'omologia speciale (cfr. 2.1 e fig. 2a), cioè la retta impropria coincide con l'asse e passa per il centro, che, di conseguenza, risulta improprio.

Le rette che congiungono due (qualunque) punti omologhi sono parallele, e parallele sono pure due (qualunque) rette omologhe. Ne consegue che i segmenti che congiungono punti omologhi sono congruenti, paralleli e concordi, e lo stesso avviene per ciascuna coppia di segmenti omologhi.

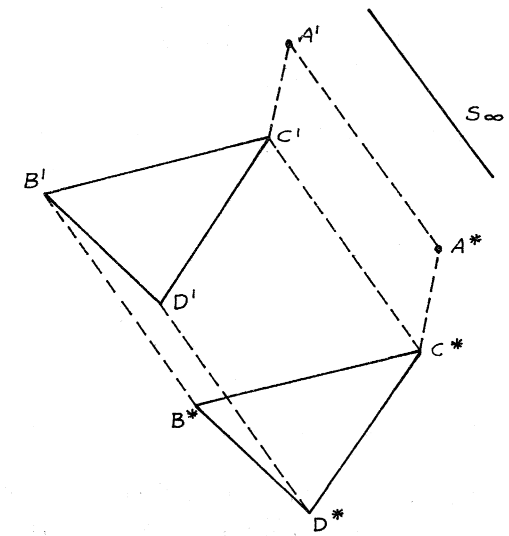

Fig. 16

In tale caso l'affinità prende il nome di *traslazione* ed è determinata quando siano assegnati: il centro improprio S_∞ e una coppia di punti omologhi A', A* allineati con S_∞. Due figure omologhe *F'*, *F** sono congruenti (fig. 16).

7. Posizioni degli elementi dello spazio che determinano alcune omologie

Mostriamo ora quali mutue posizioni di elementi (punti, rette, piani) dati nello spazio, determinano ciascuno dei casi particolari della omologia.

1. Omologia speciale. Data una sezione di stelle prospettive, detta *s* la retta (propria o impropria) comune al piano α di prospettività e al piano σ, se accade che la retta OR, che congiunge i centri delle stelle, interseca σ in un punto S (proprio o improprio) che appartiene alla retta *s*, l'omologia ω su σ è *speciale* (fig. 17).

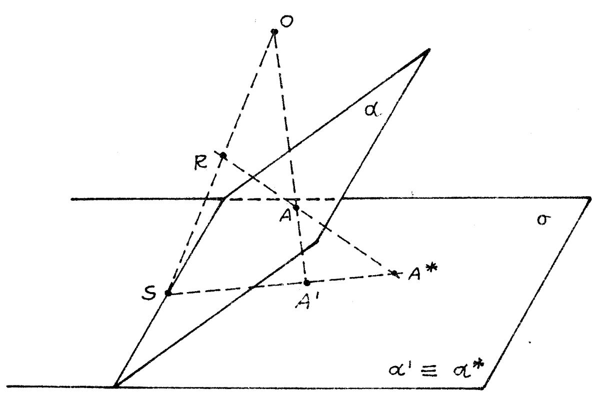

Fig. 17

2. Omotetia. Se i piani α e σ sono paralleli, e la retta OR non risulta parallela a σ, la retta *s*, asse dell'omologia, è impropria: l'omologia ω è dunque un'*omotetia* (fig. 18).

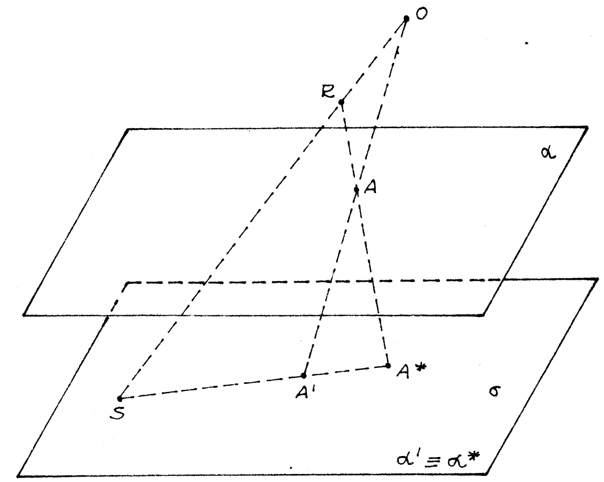

Fig. 18

3. Affinità omologica. Se i piani α e σ si intersecano in una retta *s* propria, ma la congiungente i centri OR risulta parallela a σ, il centro dell'omologia, intersezione della retta OR con σ, è il punto improprio S_∞ di OR: l'omologia ω è dunque un'*affinità omologica* (fig. 19).

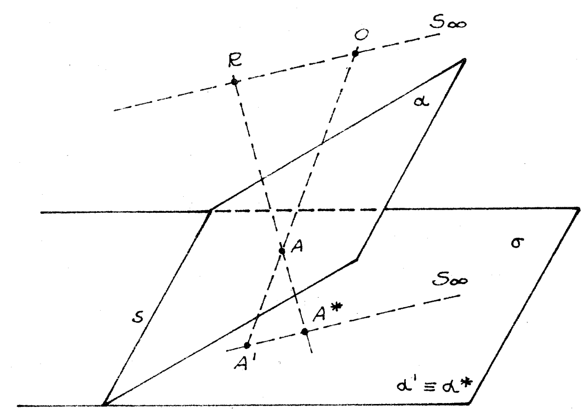

Fig. 19

4. Traslazione. Se infine si verificano simultaneamente le condizioni 2. e 3., il centro e l'asse, entrambi impropri, si appartengono, pertanto è verificata anche la condizione 1. e l'omologia ω è una *traslazione* (fig. 20).

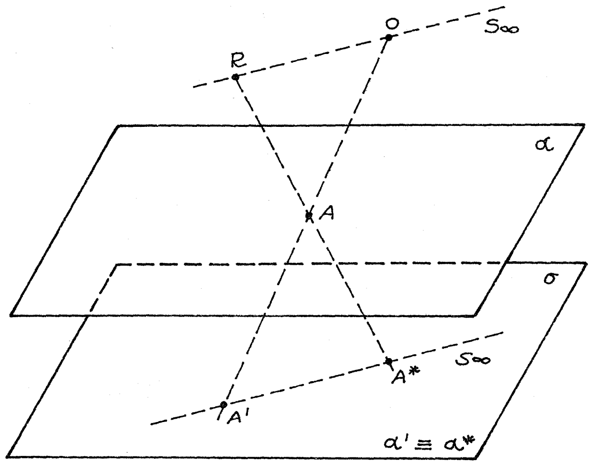

Fig. 20

9. Applicazioni dell'omologia

L'omologia è una corrispondenza tra coppie di figure appartenenti ad uno stesso piano, che ha vaste applicazioni nel campo della Geometria descrittiva.

a) L'omologia di ribaltamento consente di individuare la "vera forma e grandezza" di una figura F di un piano α, di cui sia nota la proiezione F' sul piano α' da un punto R esterno ad α ed α'. Infatti la trasformazione omologica di F' in F^* fornisce una figura congruente ad F, in quanto ribaltata di questa (cfr. VIII, 2.2.).

b) Sono ancora figure omologiche le proiezioni da un punto (proprio o improprio) di due figure appartenenti a piani prospettivi (cfr. VIII, 3.), quali ad esempio le basi di un parallelepipedo, o due sezioni piane di un cono (fig. 21): le sezioni γ e γ_1 sono prospettive dal punto

V, vertice del cono, dunque l'omologia su α', in cui si corrispondono le immagini γ_1' e γ', ha come centro il punto V', proiezione di V da R, e come asse la proiezione s' della retta s comune ai piani prospettivi π_1 e π.

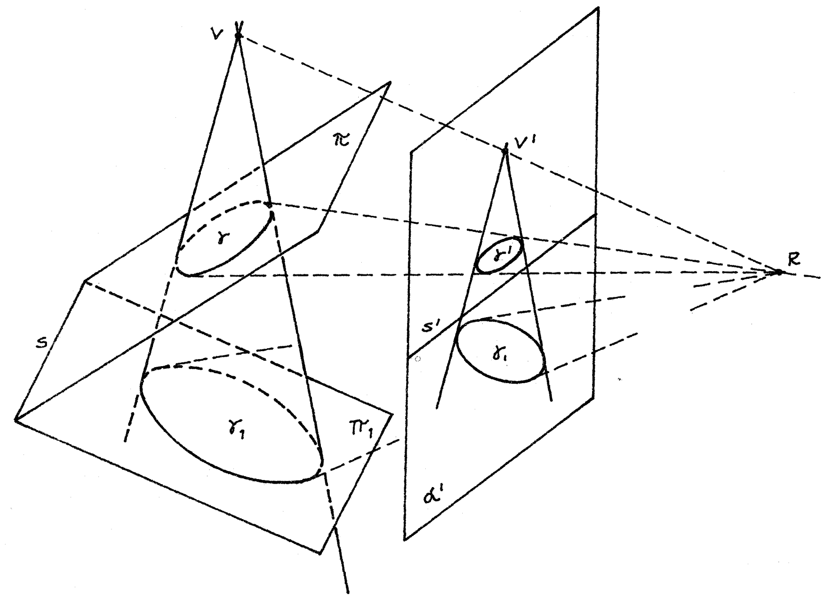

Fig. 21

c) Un altro problema che l'omologia risolve vantaggiosamente è quello di determinare su σ l'immagine $\overline{F}'$ dell'ombra $\overline{F}$, che viene proiettata su un piano π_1, di una figura F appartenente ad un piano π (distinto da π_1), di cui sia nota l'immagine F' su σ: infatti F ed $\overline{F}$ sono figure prospettive, il cui centro di prospettività è il punto L (proprio o improprio) che coincide con la sorgente luminosa.

Le relative immagini su σ, F' ed $\overline{F}'$, sono dunque figure omologiche: il centro è il punto L' (proprio o improprio), immagine di L, e l'asse è l'immagine della retta comune ai piani π e π_1 (fig. 22).

Per riassumere, possiamo dire che si ottengono due figure omologiche (e quindi data l'una è possibile determinare l'altra) quando:

– si proietta su un piano σ una figura piana da due centri distinti O ed R, propri o impropri (sezione con σ delle stelle prospettive di centri O ed R);

– si proiettano su σ da un punto R, proprio o improprio, due figure tra loro prospettive, appartenenti a due piani distinti π e π_1 (proiezione su σ dei piani prospettivi π e π_1).

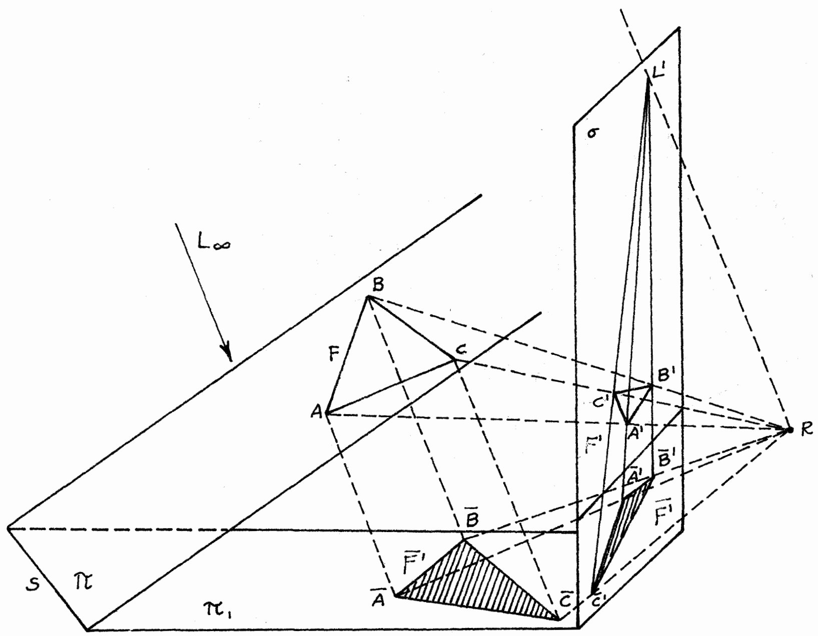

Fig. 22

PARTE SECONDA
LA GEOMETRIA DESCRITTIVA