Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito

Appello del 17/6/2025

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione
$$f(x,y) = \frac{(x+y-9)\ln(x-3)}{(x^2+y^2-6x-6y+9)\sqrt{y-3}}$$
   (b) (4 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(4,5)$, $(3+2\sqrt{2},4)$, $(3,6)$.
   (c) (2 punti) L'insieme di definizione D è un insieme aperto? E' un insieme chiuso? Si giustifichino le risposte.
   (d) (1 punto) Si dia la definizione di insieme connesso per poligonali (o, equivalentemente, per segmenti) per un insieme contenuto in $\mathbb{R}^2$.
   (e) (1 punto) Si dia la definizione di punto di massimo relativo (o locale) per una funzione $g : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

2. (a) (2 punti) Si calcoli il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}.$$

3. (a) (2 punti) Si determini il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{10}}{3^n}$.
   (b) (2 punti) Si determini l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n3^n}$.

4. (a) (3 punti) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(\frac{\pi}{2},0)$ la curva definita dall'equazione
$$\sin(xy) + \cos(x+y) = 0$$
è grafico di una funzione $y = g(x)$. Si determini se il punto $\frac{\pi}{2}$ è un punto di massimo o di minimo locale per la funzione g. Si scriva inoltre l'equazione della retta tangente alla curva in $(\frac{\pi}{2},0)$.

5. (a) (2 punti) Si determini il volume del solido (cilindroide) delimitato dall'alto dal grafico della funzione $g(x,y) = x+y$, sul dominio
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x, x^2+y^2 \le 4\}$$
.

6. (a) (4 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$
sull'insieme vincolo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, 1 \le x+y \le 3\}$.
   (b) (2 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2.$$