Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 9/7/2025

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x,y) = \frac{(y-2x^2)\ln(x)}{(x-2)\sqrt{y}}$$

   (b) (2 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(2,0)$, $(2,1)$.

   (c) (2 punti) L'insieme di definizione D è un insieme aperto? E' un insieme chiuso? Si giustifichino le risposte.

   (d) (1 punto) Si dia la definizione di insieme misurabile secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}^2$.

2. Si consideri la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\ln(|x|)} & \text{se } x \notin \{-1,0,1\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   (a) (1 punto) Si dica, giustificando la risposta, se f è continua in $(0, \frac{3}{2}\pi)$.

   (b) (1 punto) Si dica, giustificando la risposta, se $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 1$.

3. (a) (2 punti) Si studi il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

   (b) (2 punti) Si determini l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{(\ln(n))^2}$.

4. (a) (3 punti) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(1,0)$ la curva definita dall'equazione

$$\ln(x+y) + \sqrt{x+y} - 1 = 0$$

   è grafico di una funzione $y = g(x)$. Si determini se il punto 1 è un punto di massimo o di minimo locale per la funzione g. Si scriva inoltre l'equazione della retta tangente alla curva in $(1,0)$.

5. Si risolvano, giustificando le risposte, i seguenti integrali di Riemann in due variabili $\int_E f$:

   (a) (1 punto) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, x = y^2\}$, $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.

   (b) (2 punti) E parte del piano delimitata dal quadrato di vertici $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{22}{\pi} & \text{se } (x-y)(y-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) = 0 \\ \frac{\pi}{44} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   (c) (1 punto) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(x), x \in [2,\pi]\}$, $f(x,y) = xy$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile.

6. (a) (4 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 + \frac{1}{2}x$$

sull'insieme vincolo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

(b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(x^2 - y^2).$$