Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 1/9/2025

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{\ln(x+y)}}{x^4 - y^2}$$

   (b) (1 punto) Si calcoli il limite della funzione f in $(0, 1)$.

   (c) (1 punto) Si rappresenti la chiusura dell'insieme D.

2. Si consideri la seguente funzione

$$g(x, y) = \frac{(\ln(x+y))^2 + \ln(x+y)}{\ln(-\ln(x+y))}$$

   (a) (1 punto) Si determini il suo insieme di definizione E.

   (b) (2 punti) L'insieme di definizione E è un insieme aperto? E' un insieme chiuso? Si giustifichino le risposte.

   (c) (2 punti) Si calcoli $\lim_{(x,y)\to(0,e^{-1})} g(x, y)$.

3. (a) (2 punti) Si studi il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2}\ln(n)}{3n^2\sqrt{n+1}}$.

   (b) (2 punti) Si determini l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(x^2+1)^n}{2^{(n^2)}(n^2+2)}$.

4. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^5 y + \ln(x^4) - \sqrt{3xy - 2}$$

   (a) (1 punto) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(1, 1)$ la curva definita dall'equazione $f(x, y) = 0$ è grafico di una funzione $y = g(x)$.

   (b) (2 punti) Si determini se il punto 1 è un punto di massimo o di minimo locale per la funzione g e si scriva inoltre l'equazione della retta tangente alla curva in $(1, 1)$.

   (c) (1 punto) Si determini il dominio della funzione f e si provi che il punto $(1, 1)$ è un punto interno a tale dominio.

5. (a) (2 punti) Si dimostri, usando l'integrale di Riemann, che l'area di un triangolo rettangolo i cui due cateti sono lunghi rispettivamente a e b è $\frac{ab}{2}$. (NB: si suggerisce di porre il vertice dell'angolo retto del triangolo in corrispondenza dell'origine degli assi e i due cateti sugli assi stessi.)

(b) (2 punti) Si calcoli il seguente integrale di Riemann-Stieltjes:

$$\int_1^2 \ln(x) d\ln(x)$$

6. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2 + \frac{x}{6}$$

sull'insieme vincolo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x,y) = -(x^2 - y^2)\ln(x^2 + y^2).$$