

Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito

Appello del 8/1/2026

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D , il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione

$$f(x, y) = \frac{|x + y| \ln(x - y)}{\sqrt{x^2 - y}}$$

- (b) (4 punti) Si calcolino i limiti della funzione f in $(1, 1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(0, 0)$.
(c) (1 punto) Si dica se la funzione ammette punti di massimo relativo e di minimo relativo, giustificando la risposta.
2. (a) (2 punti) Si studi la continuità in $(0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2|y|}{x^2 + y^4}$$

3. Si consideri la successione di funzioni di termini $f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$, $n \in \mathbb{N}$, con $x \in [0, 1]$.

- (a) (1 punto) Si determini se la successione di funzioni $(f_n)_n$ converge puntualmente e, in caso affermativo, a che funzione.
(b) (2 punti) Si provi che la successione $(f_n)_n$ non converge uniformemente in $[0, 1]$
(c) (2 punti) Si individui un $k \in]0, 1[$ tale che $(f_n)_n$ converga uniformemente in $[0, k]$.
4. (a) (2 punti) Si determini l'insieme di convergenza della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{4^n \sqrt{n}}$.

5. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$$

- (a) (1 punto) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(1, 0)$ la curva definita dall'equazione $f(x, y) = 0$ è grafico di una funzione $y = g(x)$.
(b) (1 punto) Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva in $(1, 0)$.
(c) (1 punto) Si calcoli la derivata seconda della funzione g in 1.
6. (a) (2 punti) Sia E la regione limitata del piano compresa tra la curva di equazione $x^2 + y^2 = 4$ e le rette di equazione $y = 0$ e $y - x = 0$. Si calcoli l'integrale di Riemann della funzione $f(x, y) = x + y$ su E .

7. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$

sull'insieme vincolo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 2)^2 + y^2 \leq 4\}$.

- (b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 1}{e^{(x^2 + y^2)}}.$$