Matematica per l'economia e la statistica – Corso progredito
Appello del 10/2/2026

NB: IL TESTO OCCUPA IN PARTE ANCHE IL RETRO DEL FOGLIO

1. (a) (5 punti) Si rappresentino l'insieme di definizione D, il segno, l'insieme di livello zero e la frontiera di D per la funzione
$$f(x,y) = \ln(2 - x^2 - y^2)\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$
   (b) (1 punto) Si calcoli il limite della funzione f in $(1,1)$.
   (c) (1 punto) Si dica, giustificando la risposta, se il limite di f in $(0,0)$ è 1.
   (d) (1 punto) L'insieme di definizione D è chiuso? Si giustifichi la risposta.
2. (a) (2 punti) Si studi la continuità in $(0,0)$ della funzione
$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
3. Si consideri la successione di funzioni di termini $f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,+\infty[$.
   (a) (1 punto) Si determini se la successione di funzioni $(f_n)_n$ converge puntualmente e, in caso affermativo, a che funzione.
   (b) (2 punti) Si determini se la successione di funzioni $(f_n)_n$ converge uniformemente in $[0,+\infty[$.
4. (a) (3 punti) Si determini l'insieme di convergenza della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{n 2^n}$.
5. (a) (1 punto) Si dia la definizione di insieme misurabile secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}^2$.
   (b) (1 punto) Si spieghi perché l'insieme $\{(\pi, 1+\pi^2)\}$ ha misura di Peano-Jordan nulla.
6. Si consideri la funzione
$$f(x,y) = x^4 + y^2 - 4x^2$$
   e la curva definita dall'equazione $f(x,y) = 0$.
   (a) (1 punto) Si determinino i punti in cui il Teorema della Funzione Implicita (del Dini) NON garantisce che la curva sia localmente grafico di una funzione $y = g(x)$.
   (b) (1 punto) Si dimostri che in un intorno del punto di coordinate $(\sqrt{2}, 2)$ la curva definita dall'equazione $f(x,y) = 0$ è grafico di una funzione $y = g(x)$.
   (c) (1 punto) Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva in $(\sqrt{2}, 2)$.
   (d) (1 punto) Si dica, giustificando la risposta, se $\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo o di minimo relativo per la funzione g.

7. (a) (2 punti) Sia E la regione limitata del piano compresa tra la curve di equazione $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = e^2$ e la retta di equazione $y = 0$. Si calcoli l'integrale di Riemann della funzione $f(x, y) = \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ su E.

8. (a) (3 punti) Si determinino i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = (x^2 y + y)e^{-x^2 y}$$

sull'insieme vincolo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

(b) (3 punti) Si determinino i punti stazionari della seguente funzione e si stabilisca la loro natura:

$$f(x, y) = \frac{-e^{2x+y^2}}{x^2 - y^2}.$$