Esercizi di Statistica Descrittiva

Media Aritmetica, Mediana, Media Ponderata e Media per Gruppi

1. Media Aritmetica

Esercizio 1

Le temperature massime giornaliere (in °C) rilevate in una settimana sono:

$$22,\ 25,\ 19,\ 28,\ 24,\ 21,\ 23$$

Calcola la media aritmetica delle temperature.

Traccia di soluzione:

La media aritmetica è definita come:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{22+25+19+28+24+21+23}{7} = \frac{162}{7} \approx 23{,}14\ ^\circ\mathrm{C}$$

Esercizio 2

Uno studente ha ottenuto i seguenti voti nelle ultime interrogazioni di matematica:

$$7,\ 8,\ 6,\ 9,\ 7,\ 10,\ 5,\ 8$$

a) Calcola il voto medio.

b) Il voto medio supera il 7? Giustifica la risposta.

Traccia di soluzione:

a) $\bar{x} = \dfrac{7+8+6+9+7+10+5+8}{8} = \dfrac{60}{8} = 7{,}5$

b) Sì, $7{,}5 > 7$.

Esercizio 3

La media aritmetica di 6 numeri è $\bar{x} = 14$. Se cinque dei sei numeri sono

$$10,\ 18,\ 12,\ 16,\ 11$$

qual è il sesto numero?

Traccia di soluzione:

La somma totale è $6 \times 14 = 84$.
La somma dei cinque noti è $10 + 18 + 12 + 16 + 11 = 67$.
Quindi il sesto numero è $84 - 67 = 17$.

Esercizio 4

Un'azienda ha 4 reparti con $n_1 = 10,\ n_2 = 15,\ n_3 = 8,\ n_4 = 12$ dipendenti e medie salariali mensili (in euro) $\bar{x}_1 = 1800,\ \bar{x}_2 = 2100,\ \bar{x}_3 = 2400,\ \bar{x}_4 = 1950$.

a) Qual è la somma totale dei salari di ciascun reparto?

b) Qual è la media salariale complessiva dell'azienda?

Nota: questo esercizio anticipa il concetto di media per gruppi.

Traccia di soluzione:

a) Le somme sono $S_1 = 18000,\ S_2 = 31500,\ S_3 = 19200,\ S_4 = 23400$ euro.

b) $\bar{x} = \dfrac{18000 + 31500 + 19200 + 23400}{10 + 15 + 8 + 12} = \dfrac{92100}{45} = 2046{,}\overline{6}$ euro

2. Mediana

Esercizio 1

I tempi (in minuti) impiegati da 7 atleti per completare un percorso sono:

$$34,\ 41,\ 28,\ 55,\ 37,\ 31,\ 48$$

Calcola la mediana.

Traccia di soluzione:

Ordiniamo la serie: $28, 31, 34, \mathbf{37}, 41, 48, 55$.
Con $n = 7$ (dispari), la mediana è il valore in posizione $\frac{7+1}{2} = 4$:

$$Me = 37 \text{ min}$$

Esercizio 2

I punteggi ottenuti da 8 studenti in un test sono:

$$72,\ 85,\ 63,\ 90,\ 78,\ 55,\ 82,\ 68$$

a) Ordina i dati in senso crescente.

b) Calcola la mediana.

c) Calcola anche la media aritmetica e confronta i due indici.

Traccia di soluzione:

a) $55, 63, 68, 72, 78, 82, 85, 90$

b) Con $n = 8$ (pari), la mediana è la media dei valori in posizione 4 e 5:

$$Me = \frac{72 + 78}{2} = 75$$

c) $\bar{x} = \frac{55+63+68+72+78+82+85+90}{8} = \frac{593}{8} = 74{,}125$
I due indici sono molto vicini, indicando una distribuzione quasi simmetrica.

Esercizio 3

Gli stipendi mensili (in euro) di 9 lavoratori di una piccola impresa sono:

$$1200,\ 1350,\ 1400,\ 1450,\ 1500,\ 1550,\ 1600,\ 1700,\ 9800$$

a) Calcola media aritmetica e mediana.

b) Quale dei due indici rappresenta meglio il "salario tipico"? Perché?

Traccia di soluzione:

a)

$$\bar{x} = \frac{1200 + 1350 + 1400 + 1450 + 1500 + 1550 + 1600 + 1700 + 9800}{9} = \frac{21550}{9} \approx 2394{,}4 \text{ euro}$$

$$Me = 1500 \text{ euro} \quad (5^\circ \text{ valore su } 9)$$

b) La **mediana** è più rappresentativa: il valore anomalo (euro 9800) distorce fortemente la media verso l'alto, mentre la mediana è robusta rispetto agli *outlier*.

3. Media Ponderata

Esercizio 1

Un laureando ha sostenuto esami con i seguenti voti e crediti (CFU):

Materia	Voto (v_i)	CFU (w_i)
Analisi I	28	9
Fisica	24	6
Programmazione	30	12
Statistica	27	6
Basi di dati	26	9

Calcola la media ponderata dei voti (base di partenza per il voto di laurea).

Traccia di soluzione:

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_i w_i v_i}{\sum_i w_i} = \frac{28 \cdot 9 + 24 \cdot 6 + 30 \cdot 12 + 27 \cdot 6 + 26 \cdot 9}{9 + 6 + 12 + 6 + 9} = \frac{252 + 144 + 360 + 162 + 234}{42} = \frac{1152}{42} \approx 27{,}43$$

Esercizio 2

In un sondaggio, a 200 clienti è stato chiesto di valutare un servizio su scala 1–5 con i seguenti risultati:

Voto v_i	Frequenza f_i	$v_i \cdot f_i$
1	10	...
2	25	...
3	60	...
4	75	...
5	30	...
Totale	200	...

a) Completa la tabella.

b) Calcola la media ponderata (voto medio di soddisfazione).

c) Cosa rappresentano le frequenze in questo contesto?

Traccia di soluzione:

a) I prodotti $v_i \cdot f_i$ sono: $10, 50, 180, 300, 150$. Totale: 690.

b)

$$\bar{x}_p = \frac{690}{200} = 3{,}45$$

c) Le frequenze fungono da pesi: i voti espressi da più clienti influenzano proporzionalmente di più la media.

Esercizio 3

Un investitore possiede le seguenti quote di tre fondi:

Fondo	Capitale investito (euro)	Rendimento annuo (%)
A	5 000	3,2
B	12 000	5,8
C	3 000	1,5

Calcola il rendimento medio ponderato dell'intero portafoglio.

Traccia di soluzione:

Fondamentale! In questo caso il peso non è il reddito annuo, ma il capitale investito!!

$$\bar{r}_p = \frac{5000 \times 3{,}2 + 12000 \times 5{,}8 + 3000 \times 1{,}5}{5000 + 12000 + 3000} = \frac{16000 + 69600 + 4500}{20000} = \frac{90100}{20000} = 4{,}505\%$$

4. Media per Gruppi (Media delle Medie)

La **media per gruppi** si calcola quando i dati sono suddivisi in k gruppi, ciascuno con numerosità n_j e media $\bar{x}_j$:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j}}$$

Esercizio 1

In una scuola secondaria si misurano le altezze degli studenti per classe:

Classe	Num. studenti n_j	Altezza media $\bar{x}_j$ (cm)	$n_j \bar{x}_j$
1A	22	165,4	...
1B	18	168,2	...
1C	25	163,7	...
Totale			...

Calcola l'altezza media complessiva delle tre classi.

Traccia di soluzione:

$$n_j\bar{x}_j: \; 22 \times 165{,}4 = 3638{,}8; \quad 18 \times 168{,}2 = 3027{,}6; \quad 25 \times 163{,}7 = 4092{,}5$$

$$\bar{x} = \frac{3638{,}8 + 3027{,}6 + 4092{,}5}{22 + 18 + 25} = \frac{10758{,}9}{65} \approx 165{,}52 \text{ cm}$$

Esercizio 2

Un'azienda ha 3 stabilimenti che producono unità/giorno:

Stabilimento	Giorni lavorati (n_j)	Prod. media/giorno ($\bar{x}_j$)
Milano	20	340
Torino	15	410
Bologna	25	285

a) Calcola la produzione media giornaliera complessiva.

b) È corretto calcolare semplicemente $\frac{340 + 410 + 285}{3} = 345$? Perché?

Traccia di soluzione:

a)

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 340 + 15 \cdot 410 + 25 \cdot 285}{20 + 15 + 25} = \frac{6800 + 6150 + 7125}{60} = \frac{20075}{60} \approx 334{,}6 \text{ unità/giorno}$$

b) No: la semplice media delle tre medie non è corretta perché i tre gruppi hanno numerosità diverse (n_j diversi); occorre pesare ciascuna media con il rispettivo numero di giorni.

Esercizio 3

I dati meteo di una città registrano le temperature medie mensili per trimestre:

Trimestre	Mesi (n_j)	Temp. media ($\bar{x}_j$, °C)
Inverno	3	2,5
Primavera	3	13,8
Estate	3	26,1
Autunno	3	12,4

a) Calcola la temperatura media annuale con la formula per gruppi.

b) In questo caso coincide con la media semplice delle quattro medie stagionali? Perché?

Traccia di soluzione:

a)

$$\bar{x} = \frac{3(2{,}5 + 13{,}8 + 26{,}1 + 12{,}4)}{12} = \frac{3 \times 54{,}8}{12} = \frac{164{,}4}{12} = 13{,}7\ ^\circ\mathrm{C}$$

b) Sì: poiché tutti i gruppi hanno la stessa numerosità ($n_j = 3\ \forall j$), la formula per gruppi si riduce alla media semplice: $\dfrac{2{,}5 + 13{,}8 + 26{,}1 + 12{,}4}{4} = 13{,}7$.

Esercizio 4

Le ore settimanali di studio di 10 studenti sono:

$$5,\ 12,\ 8,\ 7,\ 15,\ 9,\ 6,\ 11,\ 8,\ 9$$

a) Calcola la media aritmetica.

b) Calcola la mediana.

c) Se uno studente studia 0 ore invece di 5, come cambiano media e mediana?

d) Qual è l'indice più robusto rispetto a tale modifica? Giustifica.

Traccia di soluzione:

a) $\bar{x} = \frac{90}{10} = 9$ ore.

b) Valori ordinati: $5, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 11, 12, 15$.

$$Me = \frac{8 + 9}{2} = 8{,}5 \text{ ore}$$

c) Con 0 al posto di 5: $\bar{x}' = \frac{85}{10} = 8{,}5$; $Me' = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$ (invariata).

d) La **mediana** è più robusta: sostituire il valore più piccolo con 0 non cambia i due valori centrali. La media invece si abbassa da 9 a 8,5.

Esercizio 5

Un questionario è stato somministrato ad un collettivo di 21 studenti. Tra le varie domande vi era anche una relativa agli affitti mensili da essi sostenuti (in €). Sono stati osservati i seguenti dati (distribuzione disaggregata):

$$210, 170, 90, 190, 80, 200, 220, 140, 120, 130, 110, 320, 160, 260, 150, 650, 110, 310, 160, 190, 280$$

Si costruisca un boxplot per rappresentare graficamente la distribuzione degli affitti rilevata sui 21 studenti.

Traccia di soluzione:

Per costruire un boxplot è necessaria la **sintesi a 5**: $x_{\text{min}},\ Q_1,\ Me,\ Q_3,\ x_{\text{max}}$.

Dati ordinati $(n = 21)$**:**

$$80, 90, 110, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 160, \mathbf{170}, 190, 190, 200, 210, 220, 260, 280, 310, 320, 650$$

Quartili:

$$Q_1 = 130, \qquad Me = 170, \qquad Q_3 = 220, \qquad IQR = Q_3 - Q_1 = 90$$

Limiti per la detezione degli outlier:

$$LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 130 - 135 = -5$$
$$LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR = 220 + 135 = 355$$

- **Baffo inferiore:** nessun valore è inferiore a $LI = -5$,
- **Baffo superiore:** $650 > LS = 355$ è un *outlier*;

$x^*_{\text{max}} = 320$: il più grande valore osservato non superiore a $LS = 355$.