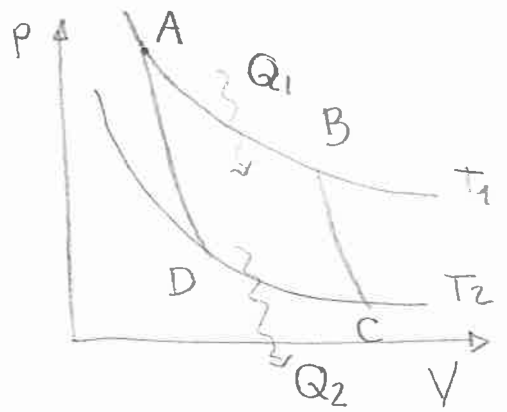
Ciclo di Carnot con gas perfetto



$$Q_1 = L_{AB} = \int_A^B p\,dV = \int_A^B \frac{nRT}{V}\,dV = nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}$$

$$Q_2 = L_{CD} = \int_C^D p\,dV = \int_C^D \frac{nRT}{V}\,dV = nRT_2 \ln\frac{V_D}{V_C}$$

B e C, come pure A e D sono connessi da adiabatiche, pertanto

$$\begin{cases} T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} \\ T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1}} \Rightarrow \boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

Per il corollario al teorema di Carnot questo risultato, ottenuto per un gas perfetto, vale per ogni fluido.

Lezione 3.2 Macchine Termiche e Frigorifere (# 10)

→ 3.2.1 Temperatura termodinamica assoluta

La relazione $\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1}$, valida per una macchina di Carnot, può essere usata per definire la temperatura T_x di un serbatoio mediante:

$$\frac{T_x}{T_3} = \frac{|Q_x|}{|Q_3|}$$

← calore ceduto al serbatoio a T_x

← calore prelevato dal serbatoio a $T_3 = 273{,}16$ K

$$T_x = T_3 \frac{|Q_x|}{|Q_3|} = 273{,}16\text{ K}\,\frac{|Q_x|}{|Q_3|}$$

Dove abbiamo immaginato una ipotetica macchina di Carnot operante tra un serbatoio al punto triplo dell'H_2O ($T_3 = 273{,}16$ K) ed il serbatoio a T_x incognita. Questa ri-definizione della temperatura (T assoluta) risolve il problema del termometro a gas perfetto, che diventa liquido al di sotto della T critica.

3.2.2 Osservazioni sulle prestazioni delle macchine termiche/frigorifere

→ Abbiamo visto $\eta_C = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

una macchina di Carnot che opera tra $T_1 = 400$ K (tipica di un motore d'automobile) e $T_2 = 300$ K (ambiente) ha rendimento:

$$\eta_C = 1 - \frac{300}{400} = 25\%$$

→ per una macchina reale operante tra le stesse temperature si ha $\eta < \eta_C$ (non è Carnot ed è irreversibile).

→ Il ciclo di Carnot operato al contrario (↺) diventa un frigorifero di Carnot con coefficiente di prestazione:

$$\omega_{FC} = \frac{|Q_2|}{|L_F|} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|} = \frac{\frac{|Q_2|}{|Q_1|}}{1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}} = \frac{\frac{T_2}{T_1}}{1 - \frac{T_2}{T_1}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

↑
Frigorifero di Carnot

Se il frigorifero di Carnot mantiene 4 °C mentre si trova in un ambiente a 30 °C, allora

$$\omega_{FC} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{279 \text{ K}}{26 \text{ K}} = 10.7$$

Un buon frigorifero reale ha $\omega_F \sim 5-6$.

→ Pompa di calore

A volte la macchina frigorifera viene usata NON per raffreddare il sistema più freddo, ma per riscaldare quello più caldo, ovvero come pompa di calore.
Il coefficiente di prestazione di una pompa di calore si definisce quindi

$$\omega_P = \frac{|Q_1|}{|L_P|} = \frac{|Q_1|}{|Q_1| - |Q_2|}$$

che nel caso di pompa di calore di Carnot:

$$\omega_{PC} = \frac{|Q_1|}{|Q_1| - |Q_2|} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\eta_C} = 1 + \omega_{FC}$$

↑
pompa di calore di Carnot

Una pompa di calore di Carnot che mantiene $T_1 = 20\ °C$ quando fuori ci sono $T_2 = -10\ °C$ ha coeff. di prestazione

$$\omega_{PC} = \frac{293\ K}{30\ K} = 9.8$$

Una buona pompa di calore reale ha $\omega_P \sim 4-5$.
Si noti che $\omega_P = 5$ implica 15 kW di potenza fornita come calore ($|Q_1|$) a fronte di 3 kW di potenza spesa come lavoro ($L = |Q_1| - |Q_2|$)

→ Equazione importante: il teorema di Carnot impone che per una macchina reale $\eta \leq \eta_C$ (= solo se reversibile)

$$1 + \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} \leq -\frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} + \frac{T_2}{T_1} \leq 0 \qquad \left(\cdot \frac{Q_1}{T_2} > 0 \text{ perché } Q_1 > 0 \right)$$

$$\boxed{\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \leq 0}$$

→ ultima nota: il concetto di rendimento si può estendere a macchine che operano tra molti serbatoi. Vale

$$\eta = \frac{L}{Q}$$

con L e Q riferiti all'intero ciclo, e Q = somma di tutti i calori assorbiti in un ciclo *

* eventualmente parzialmente compensati dai calori ceduti agli stessi serbatoi da cui viene assorbito calore (sommati col segno −)

3.2.3 Climatizzatori

→ vedi approfondimenti 3.2.3

3.2.4 Ciclo Stirling

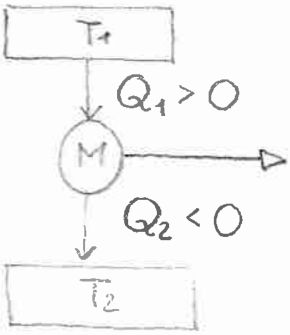
→ vedi approfondimenti 3.2.4

Riepilogo macchine termiche / frigorifere / pompe di calore (tra T_1 e T_2)

Operanti tra 2 serbatoi, T_1 e T_2, $T_1 > T_2$.

Cicliche: $\Delta U = 0 \overset{\text{IPTD}}{\Rightarrow} L = Q$

M Termica:



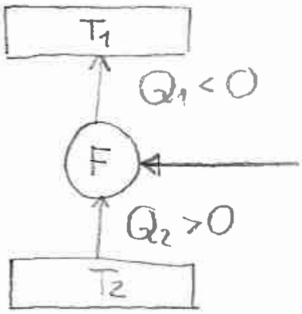
$$L = Q_1 + Q_2 = |Q_1| - |Q_2| > 0$$

deve trasformare Q_1 in L $\Rightarrow$ $\eta = \frac{L}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \overset{C}{=} 1 - \frac{T_2}{T_1} = \eta_C$ (SOLO per M di Carnot)

in generale: $\eta \leq \eta_C < 1$ — perché $|Q_2| \neq 0$ e $T_2 \neq 0$

= solo se reversibile, quindi di Carnot

F Frigorifera:



$$L = Q_1 + Q_2 = |Q_2| - |Q_1| < 0$$

deve prelevare Q_2 da serbatoio a T_2 $\Rightarrow$

$$\omega_F \equiv \frac{Q_2}{-L} = \frac{|Q_2|}{|L|}$$

$$\omega_F = \frac{Q_2}{-L} = \frac{Q_2}{-Q_1 - Q_2} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|} \overset{C}{=} \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \omega_{FC}$$ (solo per F di Carnot)

$\omega_F \leq \omega_{FC}$ — uguale solo se reversibile

F Pompa di Calore: lo schema è lo stesso della macchina frigorifera, ma diverse sono le finalità: deve cedere Q_1 al serbatoio a T_1 $\Rightarrow$

$$\omega_P \equiv \frac{Q_1}{L} = \frac{|Q_1|}{|L|}$$

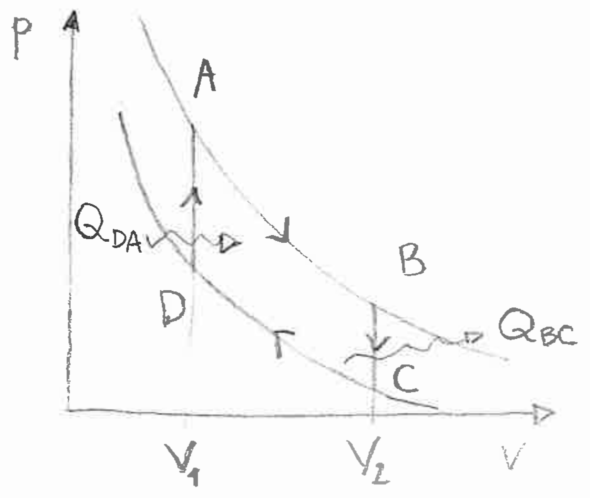
$$\omega_P = \frac{Q_1}{L} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{|Q_1|}{|Q_1| - |Q_2|} \overset{C}{=} \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \omega_{PC}$$ (solo per PC di Carnot)

$\omega_{PC} \leq \omega_P$ — uguale solo se reversibile

Infine si noti: $\omega_P = 1 + \omega_F = \frac{1}{\eta}$

Ciclo di Otto (Nikolaus Otto, 1876)

Due adiabatiche e due isocore. $T_A \neq T_B \neq T_C \neq T_D$. T_A max e T_C min.



Calore assorbito: $Q_{DA} = nc_v(T_A - T_D) > 0$

Calore ceduto: $Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B) < 0$

$$\eta = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{DA}} = 1 - \frac{T_B - T_C}{T_A - T_D}$$

Definiamo $V_1 \equiv V_A = V_D$

$V_2 \equiv V_B = V_C$

rapporto di compressione: $r = \frac{V_2}{V_1}$

$$\begin{cases} A \text{ e } B \text{ sulla stessa adiabatica: } & T_A V_1^{\gamma-1} = T_B V_2^{\gamma-1} \\ C \text{ e } D \quad '' \quad '' \quad '' \text{ : } & T_D V_1^{\gamma-1} = T_C V_2^{\gamma-1} \end{cases}$$

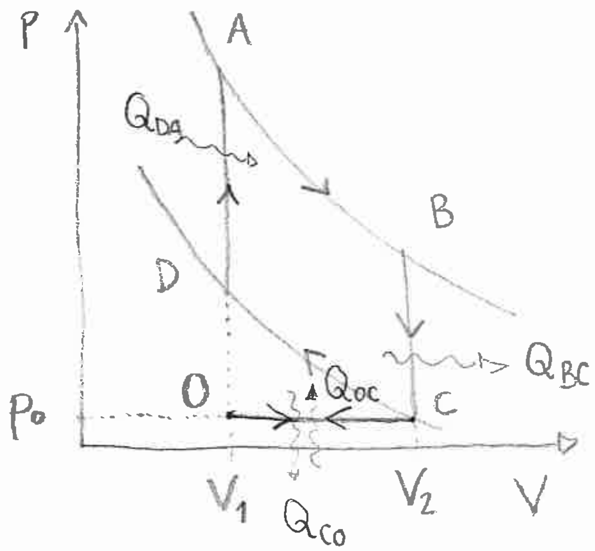
$$\Rightarrow (T_B - T_C)V_2^{\gamma-1} = (T_A - T_D)V_1^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_B - T_C}{T_A - T_D} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}$$

oppure, in funzione delle temperature... $= \frac{T_B}{T_A} = \frac{T_C}{T_D}$

$$\eta = 1 - \frac{T_B}{T_A} < \eta_C = 1 - \frac{T_C}{T_A}$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1} \sim \begin{matrix} r = 10 \\ \gamma = 7/5 \end{matrix} \sim 60\%$$

Il ciclo di Otto riproduce piuttosto bene il motore a 4 tempi, in cui si hanno anche le fasi di aspirazione (OC) e scarico (CO).



FASI DEL MOTORE A 4 TEMPI:

1. Aspirazione a p_0 atmosferica OC
2. CD compressione veloce (→ adiabatica) della miscela e DA esplosione miscela a V costante
3. AB espansione veloce (→ adiabatica) e decompressione BC (apertura della valvola e scarico libero)
4. Scarico forzato isobaro a p_0 CO

NOTA: l'aggiunta delle trasformazioni OC e CO non cambia(*) il lavoro del ciclo, ma ne abbassa il rendimento in quanto c'è scambio di calore.
In particolare, in OC si assorbe il calore $Q_{OC} = nc_p(T_C - T_O)$, mentre in CO si cede il calore uguale e contrario $Q_{CO} = nc_p(T_O - T_C)$
Quindi il rendimento "corretto" è

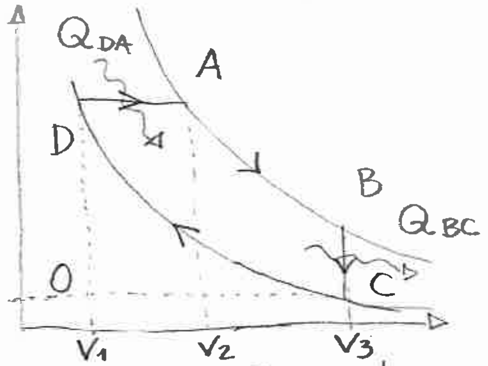
$$\eta' = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{Q}{Q_{ass}} = \frac{Q_{DA} + Q_{BC} + \cancel{Q_{CO}} + \cancel{Q_{OC}}}{Q_{DA} + Q_{OC}} =$$

$$= \frac{Q_{DA} + Q_{BC}}{\underset{>0}{Q_{DA}} + \underset{>0}{Q_{OC}}} < \frac{Q_{DA} + Q_{BC}}{Q_{DA}} = \eta$$

(*) in realtà anche L diminuisce, perché non siamo in condizioni ideali. Per un motore a benzina, $\eta' \sim 35\%$.

Ciclo Diesel (Rudolf Diesel, 1892)

Due adiabatiche, un'isobara, un'isocora. $T_A \neq T_B \neq T_C \neq T_D$. T_A max e T_C min.



Calore assorbito: $Q_{DA} = nc_p(T_A - T_D) > 0$

Calore ceduto: $Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B) < 0$

$$\eta = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{DA}} = 1 - \frac{c_v}{c_p}\frac{T_B - T_C}{T_A - T_D}$$

Il fattore $\frac{c_v}{c_p} = \frac{1}{\gamma} < 1$ suggerisce che il rendimento può essere maggiore di quello di un ciclo di Otto operante tra le stesse temperature massima (T_A) e minima (T_C).
Per i costruttori di motori è più pratico esprimere η in funzione di V_1, V_2, e V_3. Definiamo:

$$r_c = \frac{V_3}{V_1} \quad \text{rapporto di compressione}$$

$$r_e = \frac{V_3}{V_2} \quad \text{rapporto di espansione}$$

$$\begin{cases} \text{A e B sulla stessa adiabatica} & T_A V_2^{\gamma-1} = T_B V_3^{\gamma-1} \\ \text{C e D \quad " \quad " \quad "} & T_D V_1^{\gamma-1} = T_C V_3^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (T_B - T_C) V_3^{\gamma-1} = T_A V_2^{\gamma-1} - T_D V_1^{\gamma-1} \Rightarrow$$

$$\frac{T_B - T_C}{T_A - T_D} = \frac{T_A \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} - T_D \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1}}{T_A - T_D} = \frac{T_A \left(\frac{1}{r_e}\right)^{\gamma-1} - T_D \left(\frac{1}{r_c}\right)^{\gamma-1}}{T_A - T_D} =$$

Ma A e D stanno su una isobara, per cui $\frac{T_A}{T_D} = \frac{V_A}{V_D} = \frac{r_c}{r_e}$

$$= \frac{\left(\frac{r_c}{r_e}\right)\left(\frac{1}{r_e}\right)^{\gamma-1} - \left(\frac{1}{r_c}\right)^{\gamma-1}}{\left(\frac{r_c}{r_e}\right) - 1} = \frac{\left(\frac{1}{r_e}\right)^{\gamma} - \left(\frac{1}{r_c}\right)^{\gamma}}{\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_c}}$$

Ed infine:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_B - T_C}{T_A - T_D} = 1 - \frac{\frac{1}{r_e^{\gamma}} - \frac{1}{r_c^{\gamma}}}{\gamma\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_c}\right)}$$

Inserendo valori plausibili: $r_c = 20$, $r_e = 5$, $\gamma = 7/5$ $\Rightarrow \eta \cong 57\%$

Aggiungendo le fasi di aspirazione (OC) e scarico (CO) analogamente a quanto visto per il ciclo di Otto, si ottiene un modello piuttosto accurato di un motore Diesel. Anche in questo caso il rendimento di un motore reale è inferiore a quello previsto dal modello ($\eta' \sim 40\%$)