Rotazioni in 2 dimensioni

Le rotazioni su un piano sono date dalle matrici

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a) dipendono da un parametro reale α ;

b) soddisfano la relazione $R(\alpha)^T R(\alpha) = R(\alpha) R(\alpha)^T = \mathbb{1}_2$

c) dato un vettore $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ il suo trasformato sotto rotazioni è

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

d) le rotazioni formano un gruppo detto $SO(2)$. (+) Vedi ultima pagina

La proprietà b) è equivalente a dire che la norma del vettore è invariante sotto rotazioni del vettore:

$$\|\bar{v}\|^2 = \bar{v}^T \bar{v} \longmapsto (R\bar{v})^T \cdot (R\bar{v}) = \bar{v}^T \cdot R^T R \bar{v} = \bar{v}^T \bar{v} .$$

Infatti le ROTAZIONI sono definite come quelle trasformazioni sui vettori che preservano la norma e hanno determinante unitario (per distinguerle da simmetrie assiali).

$$\rightarrow \quad SO(2) = \{ R \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid R^T R = \mathbb{1} , \ \det R = 1 \}$$

(Rilassando condizione $\det R = 1$, ho gruppo $O(2)$.)

Rotazioni in dimensioni generiche

Se ho uno sp. vett. n-dim. isomorfo a $\mathbb{R}^n$, le rotazioni sono date dalle matrici $n\times n$ che preservano la norma e hanno $\det = 1$.

$$SO(n) = \left\{ R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \;\middle|\; R^T R = \mathbb{1} \;,\; \det R = 1 \right\}$$

è un GRUPPO di Lie, cioè trasformazioni che dipendono in modo CONTINUO (e analitico) dai parametri.

Rotazioni infinitesime e generatori di SO(n)

Siccome $\mathbb{1} \in SO(n)$ ed è un gruppo continuo, ci sono trasf. infinitamente vicine all'identità.

(SO(n) è gruppo di Lie)

Consideriamo

$$R = \mathbb{1} + \Omega + O(\Omega^2) \quad \text{con} \quad \Omega_{ij} \ll 1$$

Che proprietà deve avere Ω affinché R sia una rotazione infinitesima?

$$\mathbb{1} \overset{!}{=} R^T R = (\mathbb{1} + \Omega^T + \dots)(\mathbb{1} + \Omega + \dots) = \mathbb{1} + \Omega^T + \Omega + O(\Omega^2)$$

$$\Rightarrow \quad \Omega + \Omega^T = 0 \quad \text{cioè } \Omega \text{ è matrice ANTISIMMETRICA}$$

a meno di ordini successivi

Es. SO(2) : prendiamo angolo $\epsilon \ll 1$

$$\begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\operatorname{sen}\epsilon \\ \operatorname{sen}\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon^2/2 + \dots & -\epsilon + \dots \\ \epsilon + \dots & 1 - \epsilon^2/2 + \dots \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisimmetrica}} + O(\epsilon^2)$$

Ora, prendiamo la matrice antisimmetrica $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ ed esponenziamola

$$\exp A = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad\qquad E \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $A^2 = -\alpha^2 \mathbb{1}$, $A^3 = -\alpha^2 \mathbb{1} \cdot \alpha E = -\alpha^3 E$,

$$A^{2m} = (A^2)^m = (-1)^m \alpha^{2m} \mathbb{1} \qquad A^{2m+1} = (-1)^m \alpha^{2m+1} E$$

$$\exp A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{2m+1}}{(2m+1)!} = \mathbb{1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha^{2m}}{(2m)!} + E \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$= \cos\alpha \, \mathbb{1} + \operatorname{sen}\alpha \, E = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Cioè l'esponenziale della matrice infinitesima antisimm. è la matrice di rotazione. In effetti, ogni matrice di $SO(2)$ si può scrivere come $\exp(\alpha E)$.

E si dice GENERATORE di $SO(2)$.

Qto si generalizza a $SO(n)$: ogni matrice di $SO(n)$ si può scrivere come

$$R = \exp(\Omega) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\omega_i}_{\text{parametri}} \; \underbrace{E_i}_{\text{base di matrici antisimm.} \rightsquigarrow \text{generatori di } SO(n)}\Big)$$

qto è consistente col fatto che se $\Omega_{ij} \ll 1$, allora $R = \exp(\Omega) \sim \mathbb{1} + \Omega$.

Rotazioni nello spazio euclideo 3d : SO(3)

- SO(3) è generato da $E_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&-1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ -1&0&0 \end{pmatrix}$ $E_3 = \begin{pmatrix} 0&-1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

$$\Omega = \sum_{i=1}^{3} \omega_i E_i = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \Omega_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\omega_k$$

- E_i genera rotazioni attorno all'asse i-esimo

Per esempio: E_3 genera rotaz. attorno asse z (cioè nel piano xy); infatti

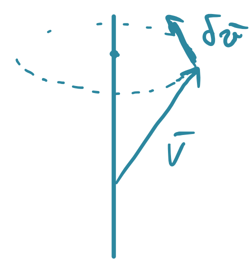
$$R_3 = \exp(\omega_3 E_3) = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & 0 \\ \omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_3 & -\operatorname{sen}\omega_3 & 0 \\ \operatorname{sen}\omega_3 & \cos\omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analoghe espressioni valgono per R_1 e R_2.

- Prendiamo vettore $\bar v \in \mathbb{R}^3$ e facciamo rotaz. infinitesima:

$$\bar v \mapsto \bar v' = \bar v + \Omega \bar v \quad \Rightarrow \quad \bar v \text{ è variato di:}$$

$$\delta\bar v \equiv \bar v' - \bar v = \Omega \bar v$$



$\delta\bar v$: tg a cerchio ⊥ asse rotaz.

$\Rightarrow \delta\bar v \perp$ asse rotaz.

In componenti

$$\delta v_i = \sum_{j=1}^{3} \Omega_{ij} v_j = -\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\omega_k v_j = \sum_{j,k} \epsilon_{ikj}\,\omega_k v_j = (\bar\omega \times \bar v)_i$$

$\Rightarrow$

- Dato vettore $\bar\omega$, $\bar\omega \times \bar v$ è la variazione sotto una rotazione infinitesima $\mathbb{1} + \Omega$ con $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

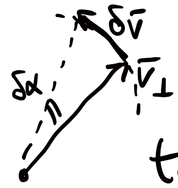
- $\delta\bar v = \bar\omega \times \bar v$ è $\perp$ $\bar v$ e $\bar\omega$

• Al variare di $\bar v$, $\delta\bar v$ generano un piano $\perp$ all'asse di rotaz.

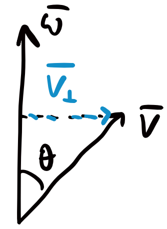
e gli $\delta\bar v$ sono tutti $\perp \bar\omega$ $\Rightarrow$ $\bar\omega$ // asse di rotazione (perché vett. $\perp$ allo stesso piano)

• $|\delta\bar v| = |\bar\omega\times\bar v| = \underbrace{|\bar\omega||\bar v|\,\text{sen}\,\theta}_{|\bar v_\perp|}$

Sul piano $\perp \bar\omega$



$$\underset{\delta\alpha}{\underset{\|}{\operatorname{tg}\delta\alpha}} = \frac{|\delta\bar v|}{|\bar v_\perp|} = |\bar\omega|$$



asse di rotaz. è // $\bar\omega$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{$\bar\omega\times\bar v$ è la variazione di $\bar v$ sotto rotaz. infinitesima di angolo $|\bar\omega|$ attorno a un asse parallelo al vett. $\bar\omega$.}}$

– Abbiamo che $(E_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk}$

– Inoltre i GENERATORI di SO(3) (le matrici E_i) soddisfano

$$\boxed{[E_i, E_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} E_k}$$

dove $[A,B] = AB - BA$ "COMMUTATORE" di matrici

Dim. $(E_iE_j)_{mn} = \sum_p (E_i)_{mp}(E_j)_{pn} = \sum_p \epsilon_{imp}\epsilon_{jpn} =$

$= -\sum_p \epsilon_{imp}\epsilon_{jnp} = -(\delta_{ij}\delta_{mn} - \delta_{in}\delta_{mj})$

$(E_iE_j - E_jE_i)_{mn} = (-\cancel{\delta_{ij}\delta_{mn}} + \delta_{in}\delta_{mj} + \cancel{\delta_{ji}\delta_{mn}} - \delta_{jn}\delta_{mi})$

$\delta_{in}\delta_{mj} - \delta_{jn}\delta_{mi} = \sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{nmk} = \sum_k \epsilon_{ijk}(-\underset{(E_k)_{mn}}{\underset{\|}{\epsilon_{kmn}}})$ //

Prendendo combinazioni lineari di E_i, posso costruire un sottosp. vett. 3-dimensionale di $M_{3\times3}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i E_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Il commutatore è un'applicazione bilineare antisimmetrica

$$[\,,\,] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$$

[Infatti $\left[\sum_i \alpha_i E_i \,,\, \sum_j \beta_j E_j \right] = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j [E_i, E_j] =$

$$= \sum_{i,j,k} \alpha_i \beta_j \epsilon_{ijk} E_k = \sum_k \left(\sum_{i,j} \epsilon_{ijk} \alpha_i \beta_j \right) E_k \in \mathcal{L} \,.]$$

Uno spazio vettoriale dotato di prodotto bilin. antisimm. è detto ALGEBRA di LIE.

Dato un' ALG. di LIE, posso associarci un GRUPPO di LIE, applicando la MAPPA ESPONENZIALE vista sopra.

(+) Rotazioni $SO(2)$ formano un gruppo : $SO(2) = \{ g(\alpha) \in M_{2\times 2}$,

t.c. $g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \}$

$\rightarrow \quad g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\operatorname{sen}\alpha_1 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\operatorname{sen}\alpha_2 \\ \operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 & -\cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix} = g(\alpha_1 + \alpha_2)$$

↑ ancora nella forma di matrice di $SO(2)$

$\rightarrow \quad g(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è Id.

$\rightarrow \quad g(-\alpha)\, g(\alpha) = g(-\alpha + \alpha) = g(0) = Id$

$\Rightarrow \quad \exists$ inverso di $g(\alpha)$, $\forall \alpha$.

ROTAZIONI e TEOREMA DI NÖTHER

Rotazioni attorno ad asse $\bar{\omega}$ sono date da

$$\exp\left(\alpha \sum_{i=1}^{3} \hat{\omega}_i E_i\right) \qquad \alpha: \text{angolo di rotaz.} \qquad \hat{\omega}: \text{versore in direz. di } \bar{\omega}$$

$$\Rightarrow \bar{\varphi}(\bar{q}, \alpha) = e^{\alpha \sum_i \hat{\omega}_i E_i} \bar{q}$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \alpha}(\bar{q}, \alpha) = \sum_i \hat{\omega}_i E_i \, e^{\alpha \sum_i \hat{\omega}_i E_i} \bar{q} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \alpha}(\bar{q}, 0) = \sum_{i=1}^{3} \hat{\omega}_i E_i \bar{q}$$

Ricordiamo che

$$\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{3} \hat{\omega}_i E_i}_{\uparrow\ \text{matrice}}\Big)_{lj} = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ljk} \hat{\omega}_k \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}(\bar{q}, 0) = -\sum_{k,j=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{\omega}_k q_j$$

Dal teorema di Nöther: se L è invariante per rotazioni attorno ad asse $\bar{\omega}$, allora la costante del moto associata è

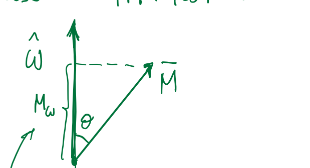
$$P = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}(\bar{q}, 0) P_i = -\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} P_i q_j \hat{\omega}_k =$$

$$= \sum_k \Big(\underbrace{\sum_{ji} \epsilon_{kji} q_j P_i}_{M_k}\Big) \hat{\omega}_k = \sum_k M_k \hat{\omega}_k = \underbrace{\bar{M} \cdot \hat{\omega}}$$

M_k k-esima componente del momento angolare $\bar{M} = \bar{q} \times \bar{p}$

COMPONENTE DEL MOMENTO ANGOLARE LUNGO L'ASSE $\bar{\omega}$.

$$M_\omega = |\bar{M}| \cos\theta = |\bar{M}| \, |\hat{\omega}| \cos\theta = \bar{M} \cdot \hat{\omega}$$



componente del momento angolare lungo $\hat{\omega}$