

CORPO RIGIDO

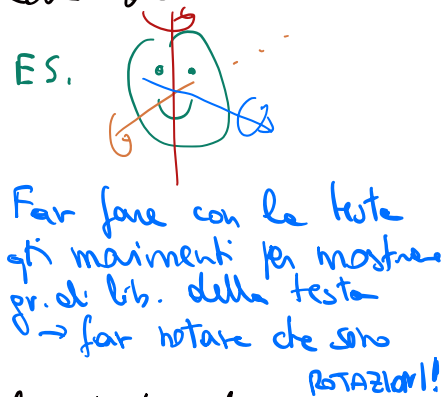
Consideriamo il MOTO RIGIDO di N punti materiali:

Le loro posizioni in un sistema di riferimento sono date da \bar{r}_α $\alpha=1, \dots, N$.

Il VINCOLO DI RIGIDITA' è dato da

$$\|\bar{r}_\alpha - \bar{r}_\beta\| = \text{costante} \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, N$$

Questo implica anche che le distanze di tutti gli N pts da un punto scelto (solidale al corpo) è costante nel tempo.



→ Le configurazioni del CORPO RIGIDO sono date da

- traslazioni del centro di massa (3 g.d.l.)

- rotazioni di una terna solidale (3 g.d.l.)

← o anche un altro qualsiasi pts o solidale

Chiamiamo tale terna $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

⇒ Dato un vettore \bar{u} solidale al corpo rigido, esso varierà nel tempo, in modo che per tempi infinitesimi esso varrà di

$$\delta \bar{u} = \Omega \bar{u} \quad \text{con } \Omega \text{ rotazione infinitesima.}$$

Qto ci dice che ad ogni istante t , $\exists!$ vettore $\bar{\omega}(t)$ t.c.

$$\dot{\bar{u}} = \bar{\omega} \times \bar{u}$$

In particolare questo è vero per la terna solidale:

$$\dot{\bar{e}}_i = \bar{\omega} \times \bar{e}_i \quad i = 1, 2, 3$$

Qto può essere vista come tre equazioni lineari nelle componenti di $\bar{\omega}$.

Se risolviamo⁽¹⁾ tali equazioni otteniamo l'UNICA SOLUZIONE

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i$$

Uno può verificare che $\bar{\omega} \times \bar{u} = \dot{\bar{u}}$:

$$\bar{\omega} \times \bar{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \bar{\omega} \times \bar{e}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_i (\bar{e}_j \times \dot{\bar{e}}_j) \times \bar{e}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_i \bar{e}_i \times (\dot{\bar{e}}_j \times \bar{e}_j)$$

Usando $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c}$ ^(*), otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times \bar{u} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_i (\dot{\bar{e}}_j \delta_{ij} - (\bar{e}_i \cdot \dot{\bar{e}}_j) \bar{e}_j) & \bar{e}_i \cdot \dot{\bar{e}}_j &= \frac{d}{dt} (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) - \dot{\bar{e}}_i \cdot \bar{e}_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_i u_i \dot{\bar{e}}_i + \frac{1}{2} \sum_j \sum_i (u_i \dot{\bar{e}}_i) \cdot \bar{e}_j \bar{e}_j = \sum_i u_i \dot{\bar{e}}_i = \dot{\bar{u}} \end{aligned}$$

(*) Dimostriamo: $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a} \times \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} b_i c_j \bar{e}_k = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} b_i c_j \sum_{mnl} \epsilon_{mnl} a_m \delta_{nk} \bar{e}_l =$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} b_i c_j \sum_{mle} \epsilon_{mkle} a_m \bar{e}_e = \sum_{ijme} b_i c_j a_m \bar{e}_e \sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} =$$

$$= \sum_{ijme} b_i c_j a_m \bar{e}_e (\delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}) = \sum_{ij} b_i c_j a_j \bar{e}_i - \sum_{ij} b_i c_j a_i \bar{e}_j =$$

$$= (\sum_i b_i \bar{e}_i) \sum_j a_j c_j - (\sum_j c_j \bar{e}_j) \sum_i a_i b_i = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c} .$$

(1) Risolviamo l'equazione $\dot{\bar{e}}_i = \bar{\omega} \times \bar{e}_i$:

- moltiplichiamo a destra e sinistra per $\bar{e}_i \times$:

$$\bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i = \bar{e}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{e}_i)$$

$$\begin{aligned} & \parallel \bar{e}_i \cdot \sum_l \omega_l \bar{e}_l = \sum_l \omega_l \delta_{li} = \omega_i \\ & \bar{\omega} (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) - \bar{e}_i (\bar{e}_i \cdot \bar{\omega}) = \bar{\omega} - \omega_i \bar{e}_i \end{aligned}$$

- sommiamo su i :

$$\sum_{i=1}^3 \bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i = 3\bar{\omega} - \bar{\omega} = 2\bar{\omega} \Rightarrow \bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i .$$

MOMENTO ANGOLARE del corpo rigido (misurato originariamente 0) di terna solidale

$$\bar{M} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{r}_{\alpha} \times \bar{v}_{\alpha}$$

↑
vect. solidali

vel. $\bar{v}_{\alpha} = \dot{\bar{r}}_{\alpha}$

$$= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{r}_{\alpha} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{\alpha}) \leftarrow \text{espressione LINEARE in } \bar{\omega}$$

$$\equiv \mathcal{I} \bar{\omega}$$

"OPERATORE d'INERZIA"

si può scrivere come un'op. lineare che agisce sul vett. $\bar{\omega}$

ENERGIA CINETICA (importante per scrivere la Lagrangiana del corpo rigido.)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{v}_{\alpha} \cdot \bar{v}_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\bar{\omega} \times \bar{r}_{\alpha}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_{\alpha})$$

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{\omega} \cdot \left[\bar{r}_{\alpha} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{\alpha}) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{r}_{\alpha} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{\alpha}) = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega}$$

OPERATORE D'INERZIA:

- Simmetrico: $\bar{v} \cdot \mathcal{I} \bar{u} = \bar{u} \cdot \mathcal{I} \bar{v}$.

- Definito positivo: $\bar{u} \cdot \mathcal{I} \bar{u} > 0 \quad \forall \bar{u} \neq 0$ (se il corpo è costituito da almeno tre punti non allineati)

- \mathcal{I} può essere rappresentato da una MATRICE, una volta scelta una base

$$\mathcal{I} \bar{e}_j = \sum_i (\underbrace{\bar{e}_i \cdot \mathcal{I} \bar{e}_j}_{\mathcal{I}_{ij}}) \bar{e}_i$$

↑
base o.n.
matrice

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \bar{u} &= \sum_k u_k \mathcal{I} \bar{e}_k = \sum_{kj} u_k \mathcal{I}_{jk} \bar{e}_j = \\ &= \sum_j \left(\underbrace{\sum_k \mathcal{I}_{jk} u_k}_{\text{componenti del vettore } \mathcal{I} \bar{u}} \right) \bar{e}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= (\mathcal{I} \bar{e}_1) \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} \bar{r}_{\alpha} \times (\bar{e}_1 \times \bar{r}_{\alpha}) = \bar{e}_1 \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\bar{r}_{\alpha}^2 \bar{e}_1 - (\bar{r}_{\alpha} \cdot \bar{e}_1) \bar{r}_{\alpha}] = \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\bar{r}_{\alpha}^2 - (\bar{e}_1 \cdot \bar{r}_{\alpha})^2) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 - x_{\alpha}^2) = \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distanza da} \\ \text{asse } x}}{d_{\alpha,x}^2} = I_x \leftarrow \begin{array}{l} \text{MOMENTO D'INERZIA} \\ \text{rispetto asse } x \end{array}
 \end{aligned}$$

Analogamente: $I_{22} = I_y$ e $I_{33} = I_z$

$$I_{12} = \bar{e}_1 \cdot \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\bar{r}_{\alpha}^2 \bar{e}_2 - (\bar{r}_{\alpha} \cdot \bar{e}_2) \bar{r}_{\alpha}) = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} \leftarrow \begin{array}{l} \text{"prodotto} \\ \text{d'inertie"} \end{array}$$

e analogamente per altri: I_{ij} con $i \neq j$.

\mathcal{I} è SIMMETRICO $\Rightarrow \mathcal{I}$ è DIAGONALIZZABILE, cioè si può scegliere una base (solidale) t.c. \mathcal{I}_{ij} è MATRICE DIAGONALE
 \rightarrow in qto caso, \bar{e}_i vengono detti ASSI PRINCIPALI D'INERZIA e I_i MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA

Se $(O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ è una terna principale d'inertia, cioè \bar{e}_i è autovett. di \mathcal{I} con autovale I_i , allora

$$\bar{M} = \mathcal{I} \bar{\omega} = \mathcal{I} \sum_{k=1}^3 \omega_k \bar{e}_k = \sum_{k=1}^3 I_k \omega_k \bar{e}_k \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 I_k \omega_k^2$$

Teorema di Huygens-Steiner: dato asse O_B passante p.c.m. e un asse a parallelo a O_B e da esso distante di d , allora

$$I_a = I_{O_B} + M d^2$$

Dim. Prendiamo $a \parallel O_B$ asse z

$$I_{a_B} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \quad I_a = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(x_{\alpha} - d)^2 + y_{\alpha}^2] = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} d^2 - 2d \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} \rightarrow 0 \quad //$$

Analogamente: \mathcal{I}_O e \mathcal{I}_B op. d'inertà relativi a un polo generico O e cen. B , allora

$$\mathcal{I}_O = \mathcal{I}_B + \mathcal{I}_O^B$$

dove \mathcal{I}_O^B t.c. $\mathcal{I}_O^B \bar{u} = m \bar{r}_{OB} \times (\bar{u} \times \bar{r}_{OB}) \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^3$

Asse di rotazione fisso:

scegliamo $\bar{e}_3 \parallel$ asse fisso $\Rightarrow \dot{\bar{e}}_3 = 0$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \bar{e}_j \times \dot{\bar{e}}_j = \frac{1}{2} (\bar{e}_1 \times \dot{\bar{e}}_1 + \bar{e}_2 \times \dot{\bar{e}}_2)$$

La config. del corpo rigido è determinata dalla conoscenza dei vett. solidali $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ $\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar{e}}_1 = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta} \bar{e}_2$$

$$\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar{e}}_2 = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta} \bar{e}_1$$

La config. può cambiare nel tempo, e il moto è descritto dalla funzione $\theta(t)$ (1 grado di lib.)

$$\rightarrow \bar{\omega} = \frac{1}{2} \left(\bar{e}_1 \times \dot{\theta} \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \times (-\dot{\theta} \bar{e}_1) \right) = \frac{\dot{\theta}}{2} (\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 + \bar{e}_1 \times \bar{e}_2)$$

$$= \dot{\theta} \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \dot{\theta} \bar{e}_3$$

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_3$$

↑ velocità dell'asse di rotazione
↑ asse di rotazione
 $\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \bar{e}_3 \cdot \mathcal{I} \bar{e}_3 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \mathcal{I}_{33} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_z \dot{\theta}^2$$

mom. d'in. risp. asse d'rotaz.

Rotaz. attorno a un ASSE passante per il c.m.

Sino a sist. di rif. del c.m.

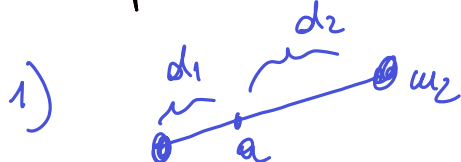
$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + T^1 \quad \leftarrow \text{in pto sist. di rif. l'asse di rotaz.}$$

e' fisso \Rightarrow si applica punto detto sopra.

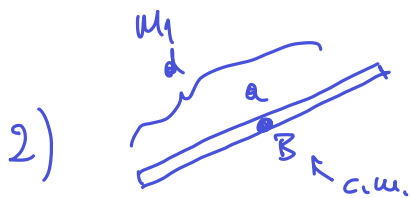
3 + 1 gradi di liberta'

Trottole non rientrano nei casi precedenti

Esempi di momento d'inerzia.

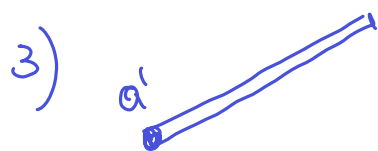


$$I_a = \sum_{i=1}^2 m_i d_i^2 = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2$$



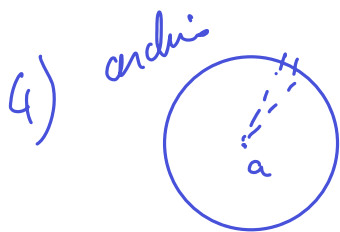
$$I_a = \int_{-d/2}^{d/2} s^2 \rho ds = \left. \frac{s^3}{3} \right|_{-d/2}^{d/2} \cdot \rho = 2 \rho \frac{d^3}{24} = \frac{M d^2}{12}$$

asta omogenea di lung. d e dens. lin. ρ
 $\rightarrow M = \rho \cdot d$



$$I_{a'} = \int_0^d s^2 \rho ds = \frac{d^3}{3} \rho = \frac{M d^2}{3}$$

$$= I_a + M \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{M d^2}{12} + \frac{M d^2}{4} = \frac{M d^2}{3}$$



$$I_a = \int_0^{2\pi} R^2 \rho R d\theta = R^3 \rho 2\pi = R^2 (2\pi R \rho) = M R^2$$



ρ dens. sup.

$$I_a = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho r dr d\theta = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi = (\pi R^2 \rho) \frac{R^2}{2} = \frac{M R^2}{2}$$

Extra: Energia cinetica per N corpi.

Per un sistema a N corpi vale il Teorema di König. Chiamiammo

- \vec{r}_α la posizione dell' α -esimo corpo ($\alpha=1, \dots, N$) in un sist. di rif. fisso
- \vec{R} la posizione del c.m. nel sist. di rif. fisso: $\vec{R} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M}$ con $M = \sum_{\alpha} m_\alpha$
- \vec{r}'_α la posizione dell' α -esimo corpo rispetto al c.m.

Vale allora $\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{r}'_\alpha$. L'en. cinetica è allora

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\dot{\vec{R}}^2 + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}'_{\alpha} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha}{}^2) =$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}'_{\alpha}{}^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}'_{\alpha}}_{=0 \text{ proporz. a vel. di c.m. in s.d.r. del c.m.}} = T_{\text{c.m.}} + T'$$

En. cinetica
nel sist. del
c.m.