

Geometria 2 2025/26

Foglio di esercizi 5

Prof. Valentina Beorchia

6 aprile 2026

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n , e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Si dimostri che esiste un unico prodotto scalare su V che rende \mathcal{B} una base ortonormale.
2. Sian $H_1, H_2 \subset \mathbb{E}$ due iperpiani paralleli.

Si dimostri che

$$d(H_1, H_2) = d(P_1, H_2),$$

dove $P_1 \in H_1$ è un punto qualunque.

Suggerimento: siano $P_1, Q_1 \in H_1$ due punti distinti. Si determinino le loro proiezioni ortogonali $P'_1, Q'_1 \in H_2$, e si verifichi, usando il Teorema di Pitagora, che $d(P_1, P'_1) = d(Q_1, Q'_1)$. Se ne deduca che $d(P_1, H_2) = d(Q_1, H_2)$.

3. In $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ si determini la distanza tra il punto $Q = (1, -2)$ e la retta r di equazione $r : 2x - y = 1$. Si determini, inoltre, il punto $A \in r$ a distanza minima da Q .
4. Nello spazio Euclideo \mathbb{E}^3 si determini la distanza tra il punto $P = (1, -1, 2)$ e la retta r di equazione

$$r : \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + z = 0. \end{cases}$$

Si determini il punto $A \in r$ di distanza minima da P .

5. Calcolare l'angolo, la distanza e il segmento di minima distanza tra le due rette r e s di $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^3$, dove

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + z = -2. \end{cases}$$

6. Si considerino i punti $A = (2, -1)$ e $Q = (1, 1)$ di $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$. Si determini la retta del fascio proprio di centro Q con massima distanza da A .
7. Si determini la distanza e i punti di minima distanza tra le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = -1 \\ z - 2y = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + z = 2. \end{cases}$$

8. Si consideri il piano in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^4$ di equazioni cartesiane

$$L : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Si determinino delle equazioni cartesiane del piano H ortogonale a L e passante per il punto $Q = (1, 1, 0, 2)$. Si calcoli la distanza tra Q e L .

9. Si consideri il piano $\pi : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$ in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^3$. Si determinino delle equazioni cartesiane dei due piani con distanza 1 da π .
10. Sia $r : y = mx + q$ una retta in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$, e sia $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ l'angolo acuto che r forma con l'asse x . Si verifichi che $\tan \theta = |m|$.
11. Si dica se la forma sesquilineare Hermitiana su \mathbb{C}^2 rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}$$

è definita positiva.

12. Si dimostri che per ogni $R_\theta, S_\theta \in \text{SO}(2)$ si ha:

$$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}, \quad (S_\theta)^{-1} = S_\theta.$$