Lezione 3 marzo 2026

martedì 3 marzo 2026 11:14

Rette nel piano affine:

visto 2 eq. cartesiane

Supp. date 2 rette con eq. parametriche:

$r_1: \begin{cases} x = a_1 + l_1 t \\ y = p_1 + m_1 t \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} x = a_2 + l_2 \tau \\ y = p_2 + m_2 \tau \end{cases}$

$\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = v_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = v_2 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

di direzione

- $r_1 \parallel r_2 \iff \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$ sono proporzionali

$\iff rg \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} = 1$

$\iff \det \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} = 0$

$r_1 = r_2 \iff r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \iff \exists \begin{cases} x_0 = \boxed{a_1 + l_1 t_0 = a_2 + l_2 \tau_0} \\ y_0 = \boxed{p_1 + m_1 t_0 = p_2 + m_2 \tau_0} \end{cases}$

$\iff \boxed{\begin{cases} l_1 t - l_2 \tau = a_2 - a_1 \\ m_1 t - m_2 \tau = p_2 - p_1 \end{cases} \text{ ha almeno una soluzione}}$ (*)

$t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ p_2 - p_1 \end{pmatrix}}_{\text{coordinate di}}$

$Q_1 = (a_1, p_1)$

$Q_2 = (a_2, p_2)$ $t \cdot v_1 - \tau v_2 = \overrightarrow{Q_1 Q_2}$

$\left(\begin{array}{cc|c} l_1 & -l_2 & a_2 - a_1 \\ m_1 & -m_2 & p_2 - p_1 \end{array}\right)$

proporzionale

$rg\, A = 1 = rg\,(A|b)$

le soluz. di (*) formano un SSA

di dim $n - rg\, A = 2 - 1 = 1$, quindi

si ha $r_1 = r_2$

- $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \iff rg \left(\begin{array}{cc|c} l_1 & -l_2 & a_2 - a_1 \\ m_1 & -m_2 & p_2 - p_1 \end{array}\right) = rg \begin{pmatrix} l_1 & -l_2 \\ m_1 & -m_2 \end{pmatrix}$

se $r_1 \nparallel r_2$, $rg \begin{pmatrix} l_1 & -l_2 \\ m_1 & -m_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow rg \left(\begin{array}{cc|c} l_1 & -l_2 & a_2 - a_1 \\ m_1 & -m_2 & p_2 - p_1 \end{array}\right) = 2$

l'int. è SSA

di dim $n - rg\, A = 2 - 2 = 0$

Ultimo caso r_1 parametrica, r_2 cartesiana

$r_1: \begin{cases} x = a_1 + l_1 t \\ y = p_1 + m_1 t \end{cases}$ $r_2: a_2 x + b_2 y = c_2$

$v_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $a_2 x + b_2 y = 0$

genera $W_{r_1} = Span(v_1)$ $W_{r_2} = Span\left(\begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}\right)$

$r_1 \parallel r_2 \iff a_2 l_1 + b_2 m_1 = 0$

$r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \iff \exists$ un punto di r_1 le cui coordinate soddisfano eq. r_2

$\iff a_2 (a_1 + l_1 t) + b_2 (p_1 + m_1 t) = c_2$

ha almeno 1 soluzione

$(a_2 l_1 + b_2 m_1) t + (a_2 a_1 + b_2 p_1) = c_2$ (*)

Due casi: 1) $a_2 l_1 + b_2 m_1 = 0$ ($\iff r_1 \parallel r_2$)

allora $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset \iff a_2 a_1 + b_2 p_1 = c_2$

eq. di r_2 valutata in (a_1, p_1)

2) $a_2 l_1 + b_2 m_1 \neq 0$ ($\iff r_1 \nparallel r_2$)

soluz. $t_0 = \dfrac{c_2 - (a_2 a_1 + b_2 p_1)}{(a_2 l_1 + b_2 m_1)}$

Esempi numerici: retta − piano

$r \begin{cases} 4x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - z = -2 \end{cases}$ $\pi: x - y + 3z = 0$ $\xrightarrow{\text{eq. par. per } \pi}$ $\begin{cases} x = s_1 - 3 s_2 \\ y = s_1 \\ z = s_2 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$I \leftrightarrow III$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} II - 3I \\ III - 4I \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -2 \\ 0 & 3 & -10 & 1 \end{array}\right)$ $III - \frac{3}{5} II$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 11/5 \end{array}\right)$

$rg\, A = 3 = rg\,(A|b) = 3 \Rightarrow r \cap \pi = \{R\}$