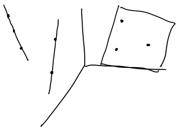
Lezione 4 marzo 2026

mercoledì 4 marzo 2026 11:15

SOTTOSPAZI AFFINI GENERATI DA PONTI

dato $\mathbb{A}$, $T_0, .., T_m \in \mathbb{A}$



Def.: sia T un sottoinsieme $\neq \emptyset$ di $\mathbb{A}$,

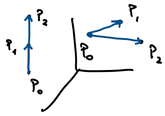
chiameremo SSA generato da $T = \{T_0, \dots, T_m\}$ il più piccolo SSA che contiene T,

cioè l'int. di tutti i sottospazi affini che $\supseteq T$ e lo indicheremo con

$$L(T_0, .., T_m) \subseteq \mathbb{A}$$

$$\underbrace{\{T_0, \dots, T_m\}} = T$$

Pb.: Come identificare $L(T_0, .., T_m)$?



> Prop. Il SSA $L(T_0, \dots, T_m)$ è determinato da T_0 e dalla giacitura
>
> $$W = \text{Span}(\overrightarrow{T_0T_1}, \dots, \overrightarrow{T_0T_m})$$
>
> In particolare, $\dim L(T_0, \dots, T_m) = \dim W \leq m$

Dim.: $\overrightarrow{T_0T_i}$ devono appartenere alla giacitura per def. ssa

Quindi $\{T : \overrightarrow{T_0T} \in \text{Span}(\overrightarrow{T_0T_1}, .., \overrightarrow{T_0T_m})\} \subseteq H_i$ per ogni SSA $H_i \supseteq T$.

Per costruzione, il sottosp. affine con punto base T_0 e giacitura $\text{Span}(\overrightarrow{T_0T_1}, --, \overrightarrow{T_0T_m})$ contiene T.

OSS. Posso cons. un punto qualunque $T_i \in T$ e poi $\text{Span}(\{\overrightarrow{T_iT_j} : j \neq i\})$ come giacitura, non necessariamente T_0.

Def.: Se $\dim L(T_0, .., T_m) = 1$, allora i punti si dicono ALLINEATI.

Se $\dim L(T_0, .., T_m) = m$, allora i punti si dicono AFFINEMENTE INDIPENDENTI.

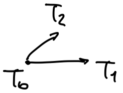
OSS.: Se $T = \{P_0, P_1\}$, $P_0 \neq P_1$

$\dim L(T_0, T_1) = 1$, cioè per 2 punti passa 1 retta (in qualunque dim di $\mathbb{A}$)

1° post. Euclide

Inoltre: questa retta è unica, perché abbiamo visto ieri che 2 rette distinte si intersecano al più in 1 punto.

OSS.: Per 3 punti non allineati $\{T_0, T_1, T_2\}$



$\Rightarrow \overrightarrow{T_0T_1}, \overrightarrow{T_0T_2}$ indipendenti

$\Rightarrow \exists!$ piano affine $H \supset \{T_0, T_1, T_2\}$

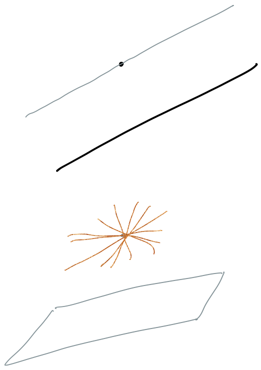
PROP.: Dato $S \subseteq \mathbb{A}$ SSA; $P \in \mathbb{A}$

$\Rightarrow \exists!$ SSA S':

$\dim S' = \dim S$

$P \in S'$

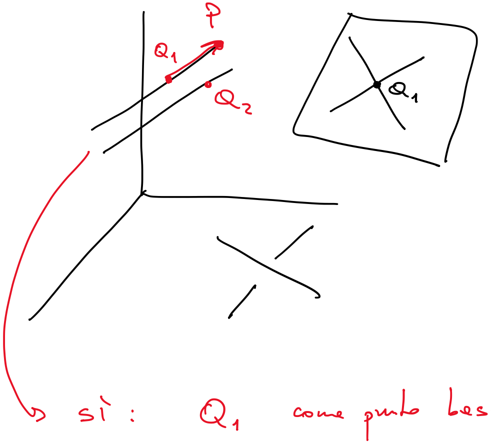
e $S' \parallel S$.



OSS.: Se $\dim S = 1$, otteniamo il 5° postulato di Euclide

Dim.: L'unica possibilità per S' è di passare per P con giacitura $= W_S$.

OSS.: Con queste tecniche possiamo decidere quando 2 rette dello spazio sono COMPLANARI, cioè $r_1, r_2 \subseteq H$ piano.



$\subseteq H = \{P : \overrightarrow{Q_1P} \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)\}$

dove v_1 : $\mathrm{Span}(v_1) = W_{r_1}$

v_2 : $\mathrm{Span}(v_2) = W_{r_2}$

sì : Q_1 come punto base

e giacitura $\mathrm{Span}(\overrightarrow{Q_1Q_2}, v)$

dove $\mathrm{Span}(v) = W_{r_1} = W_{r_2}$

$\overrightarrow{Q_1Q_2}$ e v sono LIN INDIP. :

$$\left.\begin{array}{l} v = \overrightarrow{Q_1P} \\ \overrightarrow{Q_1Q_2} \end{array}\right\}$$ sono proporzionali $\Longleftrightarrow$ P, Q_1, Q_2 sono allineati

$$H = \{P \in \mathbb{A}^3 : \overrightarrow{Q_1P} \in W = \mathrm{Span}(\overrightarrow{Q_1Q_2}, v)\}$$

$\Rightarrow Q_2 \in H$; $H \parallel r_2$, $H \cap r_2 \supseteq \{Q_2\}$

Esercizio: Date 2 rette $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{A}^3_K$

$r_1 = \{P : \overrightarrow{Q_1P} \in W_{r_1}\}$, $W_{r_1} = \mathrm{Span}\{v_1\}$

$r_2 = \{P' : \overrightarrow{Q_2P'} \in W_{r_2}\}$ $W_{r_2} = \mathrm{Span}\{v_2\}$

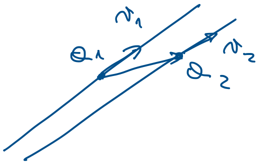
Vale : r_1 e r_2 sono COMPLANARI

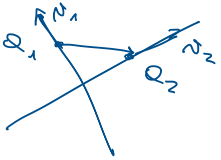
$\Longleftrightarrow$ $v_1, v_2, \overrightarrow{Q_1Q_2}$ sono LIN. DIPEND.

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & y_1 - x_1 \\ m_1 & m_2 & y_2 - x_2 \\ n_1 & n_1 & y_3 - x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$Q_1 = (x_1, x_2, x_3)$

$Q_2 = (y_1, y_2, y_3)$





Programma del futuro prossimo:

- fasci di iperpiani
- geo affine reale (semirette, semipiani, ...)
  segmenti
  triangoli
  poligoni convessi

* * *

FASCI DI RETTE PIANE

Def.: Siano $r_1: \; a_1x+b_1y+c_1=0$

$r_2: \; a_2x+b_2y+c_2=0$

rette in $\mathbb{A}^2_K$

Il FASCIO DI RETTE GENERATO da r_1 e r_2 è l'insieme delle rette di eq.:

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

$\lambda,\mu\in K$

$$(\lambda a_1+\mu a_2)x+(\lambda b_1+\mu b_2)y+(\lambda c_1+\mu c_2)=0$$

PROP.: Supp. $r_1\neq r_2$.

① se $r_1\cap r_2=\{P\}$ $\Rightarrow$ ogni retta del fascio passa per P

FASCIO PROPRIO

Inoltre: ogni retta del piano passante per P appartiene al fascio.

② se $r_1 \parallel r_2$ $\Rightarrow$ ogni retta del fascio è parallela a r_1.

FASCIO IMPROPRIO

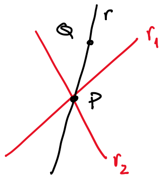
Dim.: $P=(\bar{x},\bar{y})$,

$a_1\bar{x}+b_1\bar{y}+c_1=0$

$a_2\bar{x}+b_2\bar{y}+c_2=0$

$\Rightarrow \lambda(a_1\bar{x}+b_1\bar{y}+c_1)+\mu(a_2\bar{x}+b_2\bar{y}+c_2)=0$

Sia ora r una retta per P



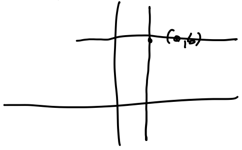
$Q = (\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) \notin r_1, \notin r_2$

cons. la gen. retta del fascio e impongo pass. per Q:

$$\lambda(\underbrace{a_1 \overline{\overline{x}} + b_1 \overline{\overline{y}} + c_1}_{\alpha \neq 0}) + \mu(\underbrace{a_2 \overline{\overline{x}} + b_2 \overline{\overline{y}} + c_2}_{\beta \neq 0}) = 0$$

$$\lambda = \frac{-\beta\mu}{\alpha}$$

Es: Scrivere la generica retta per $P = (a, b)$



cons.

$x - a = 0$

$y - b = 0$

$$\Rightarrow \lambda(x-a) + \mu(y-b) = 0$$

② $r_1 \parallel r_2$

$\underbrace{a_2 x + b_2 y} + c_2 = 0$

è propoz. a $a_1 x + b_1 y$

$$\lambda(a_1 x + b_1 y + c_1) + \mu(\alpha a_1 x + \alpha b_1 y + c_2) = 0$$

$$\underbrace{(\underbrace{\lambda + \mu\alpha}) a_1 \underbrace{x}_{=} + (\underbrace{\lambda + \mu\alpha}) b_1 y} + (\lambda c_1 + \mu c_2) = 0$$

FASCI DI PIANI IN $\mathbb{A}^3_K$

$H_1: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$

$H_2: a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

Def.: Fascio di piani

$$\lambda(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0$$

PROP.: Siano $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{A}^3$ piani distinti

① se $H_1 \cap H_2 = L$ retta $\Rightarrow$ ogni piano del fascio contiene L

FASCIO PROPRIO

Inoltre: ogni piano contenente L è un piano appartenente al fascio.

② se $H_1 \parallel H_2$ $\Rightarrow$ tutti i piani del fascio sono paralleli tra loro.

FASCIO IMPROPRIO parallelo a H_1.