Lezione 9 marzo 2026

lunedì 9 marzo 2026 13:56

APPLICAZ. AFFINI E AFFINITÀ

Dati 2 spazi affini $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$

su sp. vettoriali V e V', su K

Abbiamo

$\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$, $\sigma' : \mathbb{A}' \times \mathbb{A}' \to V'$

Idea: sfruttare V e V' e la conoscenza delle trasformazioni che mantengono la struttura di spazio vettoriale, cioè le applicazioni lineari.

Def.: Un'applicazione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$

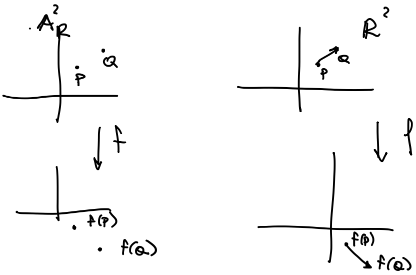
si dice **APPLICAZIONE AFFINE**

se $\exists$ un'APPLICAZIONE LINEARE $\varphi : V \to V'$

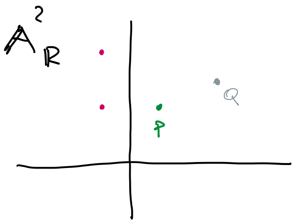
tale che $\forall\, P, Q \in \mathbb{A}$ si ha

$$\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)\, f(Q)}$$

φ si dice PARTE LINEARE di f.

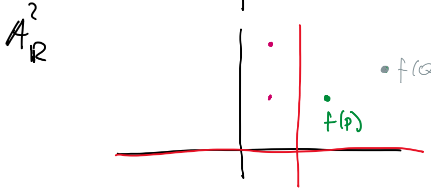


Es.:



cons. $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

$f(x, y) = (x+1, y)$



Se

$P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$

$f(P) = (p_1+1, p_2)$, $f(Q) = (q_1+1, q_2)$

$$\underline{\varphi(\overrightarrow{PQ})} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \begin{pmatrix} q_1+1-(p_1+1) \\ q_2-p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1-p_1 \\ q_2-p_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\overrightarrow{PQ}} \qquad \forall P,Q \in A^2_{\mathbb{R}}$$

$\Rightarrow \varphi = id_{\mathbb{R}^2}$ ed è una App. lineare
AL

$\Rightarrow$ f è una applicazione affine

Def.: Se f è una trasf. affine ed è BIIETTIVA, allora f si dice ISOMORFISMO AFFINE e scriviamo

$$A \cong A'.$$

In particolare, se $A = A'$ e f è isomorfismo, f si dice AFFINITA' di A in sè.

Oss.: f biiettiva $\Longleftrightarrow$ la sua parte lineare φ è un isomorfismo.

Infatti: supp. che f sia biiettiva

La parte lineare φ soddisfa:

$$\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

voglio determinare $\ker \varphi$

supp. $\varphi(\overrightarrow{PQ}) = 0_{V'}$

$= \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ $\Longleftrightarrow$ $f(P) = f(Q)$

f iniettiva $\Rightarrow$ $P = Q$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP} = 0_V$

$\Rightarrow \ker \varphi = \{0_V\}$

Inoltre: f suriettiva $\overset{?}{\Longrightarrow}$ φ suriettiva?

cons. $v' \in V'$; $v' = \overrightarrow{P'Q'}$ per opportuni $P', Q' \in A'$

f suriettiva per ipotesi $\Rightarrow \exists P \in A : P' = f(P)$

$\exists Q \in A : Q' = f(Q)$

$$v' = \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{per def. di } \varphi}}{=} \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

se $\overrightarrow{PQ} = v \in V$, ho trovato che

$$\varphi(v) = v'$$

Viceversa: per esercizio (φ è isomorfismo $\Rightarrow$ f è biiettiva)

COR. Se $f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è isomorfismo affine $\Rightarrow \dim V = \dim V'$

$\Rightarrow \dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}'$.

Esempi: Cons. $\mathbb{A}^n_K$ SA standard

Si può immergere con una applicazione affine iniettiva in $\mathbb{A}^m_K$ dove $m \geq n$.

Infatti, se cons.

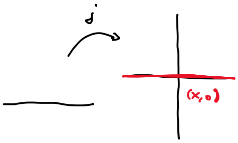
$$j: \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^m_K$$

$$j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

es. $n=1$, $m=2$

$$j: \mathbb{A}^1_K \to \mathbb{A}^2_K$$

$$j(x) = (x, 0)$$



Si ha

$$f\begin{pmatrix} q_1-p_1 \\ \vdots \\ q_n-p_n \end{pmatrix} = f(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{j(P)\,j(Q)} = \begin{pmatrix} q_1-p_1 \\ q_2-p_2 \\ \vdots \\ q_n-p_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j(P) = (p_1, \dots, p_n, 0, \dots, 0)$$

$$j(Q) = (q_1, \dots, q_n, 0, \dots, 0)$$

Quindi: $f: K^n \longrightarrow K^m$

$$f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed è immediato verificare che f è iniettiva

VARIANTE:

$$\tilde{j}: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m \qquad m \geq n$$

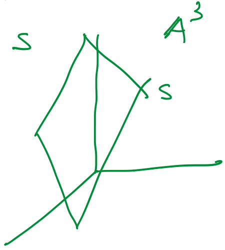
$$\tilde{j}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + c_1, x_2 + c_2, \dots, x_n + c_n, c_{n+1}, \dots, c_m)$$

Esempio: Cons. un SSA $S \subseteq \mathbb{A}^n$ di $\dim S = k$

Un sistema di eq. parametriche per S determina una app. affine iniettiva

$f: \mathbb{A}^k \to \mathbb{A}^n$

t.c. $f(\mathbb{A}^k) = S$



Infatti: se S ha equazioni

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \dots + t_k w_{1k} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

definisco $f: \mathbb{A}^k \to \mathbb{A}^n$

$$f(t_1, \dots, t_k) = (q_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_k w_{1k}, \dots, q_n + t_1 w_{n1} + \dots + t_k w_{nk})$$

$f(\mathbb{A}^k) = S$; f è iniettiva (esercizio)

* * *

es. $L \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ retta

$$\begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \end{cases}$$

$f: \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$

$f(t) = (q_1 + lt, q_2 + mt)$

$f(\mathbb{A}^1) = L$

* * *

Verifichiamo che f è AA (applicazione affine)

cons. $\varphi(\overrightarrow{PR}) = \overrightarrow{f(P)f(R)}$ è lineare?

$P = (p_1, \dots, p_k)$, $R = (r_1, \dots, r_k)$

$$f(P) = (q_1 + p_1 w_{11} + \dots + p_k w_{1k}, \dots, q_n + p_1 w_{n1} + \dots + p_k w_{nk})$$

$$f(R) = (q_1 + r_1 w_{11} + \dots + r_k w_{1k}, \dots, q_n + r_1 w_{n1} + \dots + r_k w_{nk})$$

$$\overrightarrow{f(P)f(R)} = \begin{pmatrix} w_{11}(r_1 - p_1) + \dots + w_{1k}(r_k - p_k) \\ \vdots \\ w_{n1}(r_1 - p_1) + \dots + w_{nk}(r_k - p_k) \end{pmatrix} = \overset{B}{\begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nk} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} r_1 - p_1 \\ \vdots \\ r_k - p_k \end{pmatrix}$$

$= \varphi(\overrightarrow{PR})$

$n \times k$

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} r_1 - p_1 \\ \vdots \\ r_k - p_k \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ f è lineare, e precisamente corrisponde alla moltiplicazione per la matrice B delle componenti dei vettori $w_1, \dots, w_k$ base di W, giacitura di S

Lemma: Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ due SA.
Fissati due punti $O \in \mathbb{A}$ e $O' \in \mathbb{A}'$,
e fissata una applicazione lineare $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V')$
$(\mathcal{L}(V, V'))$

esiste 1! trasf. affine

$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$

tale che:
Ⓐ $f(O) = O'$
Ⓑ φ è la parte lineare di f

Dim.: Definiamo f come segue:

$\forall P \in \mathbb{A}$, definisco $f(P)$ come l'unico punto tale che

(✱) $$\overrightarrow{O'f(P)} = \overbrace{\varphi(\overbrace{\overrightarrow{OP}}^{\in V})}^{\in V'}$$

f è affine: siano $P, Q \in \mathbb{A}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(P)f(Q)} &= \overrightarrow{f(P)O'} + \overrightarrow{O'f(Q)} \\ &= -\overrightarrow{O'f(P)} + \overrightarrow{O'f(Q)} \\ &= -\varphi(\overrightarrow{OP}) + \varphi(\overrightarrow{OQ}) \\ &\overset{\varphi \text{ lineare}}{=} \varphi(-\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \\ &= \varphi(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}) = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \end{aligned}$$

Verifico che $f(O) = O'$:
per costruzione $f(O)$ è l'unico punto t.c.

$$\overrightarrow{O'f(O)} = \varphi(\overrightarrow{OO}) = \varphi(0_V) = 0_{V'} \quad \text{perché } \varphi \text{ lineare}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{O'f(O)} = \overrightarrow{O'O'} \quad \Longrightarrow f(O) = O'!$$

Unicità: se $g : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è trasf. affine t.c. $g(O) = O'$ e φ è parte lineare

$$\Longrightarrow \overrightarrow{O'g(P)} = \overrightarrow{g(O)g(P)} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'f(P)}$$

$$\Longrightarrow g(P) = f(P) \quad \forall P \in \mathbb{A}$$

(SA1)