Lezione 10 marzo 2026

martedì 10 marzo 2026 11:14

Ieri: applic. affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ t.c.

$\exists\ \ell : V \to V'$ AL per

cui vale $\forall P, Q \in \mathbb{A}$

$$\ell(\underbrace{\vec{PQ}}_{\in V}) = \overrightarrow{f(P)\, f(Q)} \in V'$$

Esercizio: Se f, g sono app. affini

$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, $g : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$

$\Rightarrow$ $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}''$

è una applic. affine, e la sua parte lineare è la composizione delle 2 parti lineari;

cioè: $\ell_f : V \to V'$ parte lineare di f
$\ell_g : V' \to V''$ — " — di g

$\Rightarrow$ parte lineare di $g \circ f$ è $\ell_g \circ \ell_f$.

* * *

ISOMORFISMI AFFINI

Prop.: ① $id_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ è un isomorf. affine con parte lineare $id_V : V \to V$

② se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ isom. affine
$\Rightarrow$ $f^{-1} : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ è isom affine,
la parte lineare è ℓ_f^{-1}

③ $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ isom. affine
$g : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ isom. affine
$\Rightarrow$ $g \circ f$ è isom. affine.

Dim. Esercizio; basta applicare le definizioni.

COROLLARIO: Se $\mathbb{A}$ sp. affine, allora

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{A}) := \{ \text{affinità di } \mathbb{A} \}$$

$(= \{ f : \mathbb{A} \to \mathbb{A},\ f \text{ isom. affine})$

è un GRUPPO rispetto alla $\circ$.

OSS.: In generale $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ non è abeliano. Segue dalla non abelianità di $GL(V)$ (gruppo lineare)
$= \{ \text{isomorfismi lineari } V \to V \}$

Def. I sottogruppi di $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ si dicono

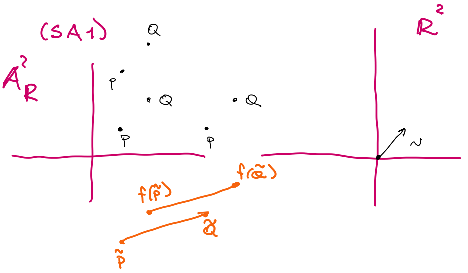
SOTTOGRUPPI DI TRASF. AFFINI.

Richiamo : $\forall v \in V$, possiamo cons.

$$t_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$

$$P \to t_v(P) = Q \quad \text{t.c.} \quad \overrightarrow{PQ} = v$$

(SA1)



Teorema: Dato $\mathbb{A}$ su V, allora le traslazioni t_v sono tutte e sole le affinità con parte lineare $id_V : V \to V$.

Dim. $t_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$

$t_v(P) = Q$ t.c. $\overrightarrow{PQ} = v$

$P, P' \in \mathbb{A}$

$$\boxed{\overrightarrow{t_v(P)t_v(P')}} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'}$$

$\overrightarrow{PQ} = v$

$\overrightarrow{P'Q'} = v$

$$= -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'}$$

$$= -v + \overrightarrow{PP'} + v$$

$$\boxed{= \overrightarrow{PP'}} = \varphi(\overrightarrow{PP'})$$

$\Rightarrow t_v$ è app. affine, e la parte lineare è $\varphi = id_V$; è isom. $\Rightarrow t_v$ è affinità

Viceversa: $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ affinità con parte lineare $\varphi = id_V$:

$\forall P, P' \in \mathbb{A}$, $\overrightarrow{f(P)f(P')} = \varphi(\overrightarrow{PP'}) = \overrightarrow{PP'}$

Fisso $P \in \mathbb{A}$
Pongo : $v := \overrightarrow{Pf(P)}$

Cons. $Q \in \mathbb{A}$ arbitrario

$$\overrightarrow{Qf(Q)} = \underbrace{\overrightarrow{QP}}_{-\overrightarrow{PQ}} + \underbrace{\overrightarrow{Pf(P)}}_{v} + \underbrace{\overrightarrow{f(P)f(Q)}}_{\overrightarrow{PQ}}$$

perché $\varphi = id_V$

$= v$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Qf(Q)} = v \quad \forall Q \in \mathbb{A}$$

$$\Rightarrow f = t_v$$

Abbiamo visto che l'insieme di tutte le traslazioni $T(\mathbb{A})$ è un gruppo risp. $\circ$

Come conseguenza del Teorema sulla caratterizzazione delle traslazioni abbiamo:

COR.: $T(\mathbb{A})$ è un sottogruppo di $Aff(\mathbb{A})$.

Inoltre:
$$\begin{aligned} T(\mathbb{A}) &\longrightarrow V \\ t_v &\longrightarrow v \end{aligned}$$

è ISOM. DI GRUPPI

tra $(T(\mathbb{A}), \circ)$ e $(V, +)$

in part. $T(\mathbb{A}) \subseteq Aff(\mathbb{A})$ è commutativo.

Cons. ora un altro sottogruppo:

Def.: sia $O \in \mathbb{A}$ punto fissato, e cons.

$$Aff_O(\mathbb{A}) := \{ f \in Aff(\mathbb{A}) : f(O) = O \}$$

SOTTOGRUPPO delle AFFINITÀ che fissano O.

Lemma: L'applicazione

$$\Phi_O : Aff_O(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V)$$

$$\Phi_O(f) = \ell_f \quad \text{parte lineare}$$

è un isomorfismo di gruppi

tra $(Aff_O(\mathbb{A}), \circ)$ e $(GL(V), \circ)$

Dim. Φ_O è omomorfismo di gruppi per il Teo. visto oggi.

è iniettivo: supp. $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $f(O) = O$
$g : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ $g(O) = O$

supp. $\ell_f = \ell_g$ le parti lineari

sia $P \in \mathbb{A}$ punto qualunque

$$l_f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{\boxed{O}f(P)}$$

$$\downarrow \quad f(O) = O$$

$$= \Big|$$

$$l_g(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{g(O)g(P)} = \overrightarrow{\boxed{O}g(P)}$$

$$= \quad \Longrightarrow f(P) = g(P) \quad \forall P \in \mathbb{A}$$

* * *

Più in generale, posso cons.

$$\Phi : \mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V)$$
$$f \longrightarrow l_f$$

LEMMA: L'applicazione Φ è omomorfismo di gruppi, suriettivo e $\ker \Phi = T(\mathbb{A})$ sottogruppo delle traslazioni

Vediamo ora come le traslazioni e le affinità che fissano un punto danno luogo e tutte le affinità:

TEOREMA: Fattorizzazione di affinità:

Sia $\mathbb{A}$ su V, e sia $O \in \mathbb{A}$ un punto fissato. Allora $\forall f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ si ha

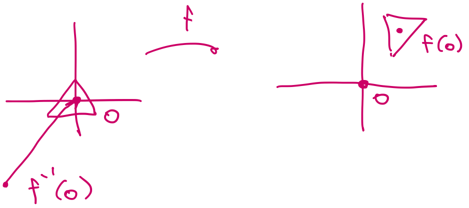
① $\exists$ e sono unici $v \in V$ e $g \in \mathrm{Aff}_O(\mathbb{A})$ t.c.

$$f = g \circ t_v \quad ; \text{ ovvero}$$

② $\exists$ e sono unici $w \in V$ e $h \in \mathrm{Aff}_O(\mathbb{A})$ tali che

$$f = t_w \circ h .$$

Dim.: ① $v := \overrightarrow{f^{-1}(O)\,O}$



$$t_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A} \qquad , \quad v = \overrightarrow{f^{-1}(0)\,0}$$

$$t_v^{-1} = t_{-v} \qquad -v = \overrightarrow{0\,f^{-1}(0)}$$

$$g := f \circ t_v^{-1}$$

$$g(0) = (f \circ t_v^{-1})(0) = f(\underbrace{t_{-v}(0)}_{=f^{-1}(0)}) = 0$$

$$g \in \mathrm{Aff}_0(\mathbb{A})$$

$$f \circ \underbrace{t_v^{-1} \circ t_v}_{= id_{\mathbb{A}}} = g \circ t_v$$

$$f = g \circ t_v$$

② simile: $w := \overrightarrow{0\,f(0)}$

$$h := t_w^{-1} \circ f$$

Esempi numerici:

affinità di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:

$$f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

$P = (p_1, p_2)$, $f(P) = (f_1(p_1,p_2), f_2(p_1,p_2))$

$Q = (q_1, q_2)$ $\quad f(Q) = (f_1(q_1,q_2), f_2(q_1,q_2))$

$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = f(\overrightarrow{PQ})$; $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare

$\Longleftrightarrow$ è del tipo moltiplicazione per una matrice 2×2 : A

$$\begin{pmatrix} f_1(q_1,q_2) - f_1(p_1,p_2) \\ f_2(q_1,q_2) - f_2(p_1,p_2) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

f isom. $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

$$\begin{pmatrix} f_1(Q) \\ f_2(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(P) \\ f_2(P) \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$