Lezione 12 marzo 2026

giovedì 12 marzo 2026 11:13

Domanda: come trasformano sottospazi affini le applicazioni affini?

Li trasf. in SSA.

PROP.: Sia $f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una applic. affine, con parte lineare

$$\varphi : V \to V'$$

Allora: se $S \subseteq \mathbb{A}$ è un sottosp. affine per $Q \in \mathbb{A}$ e di giacitura W,

allora $f(S) \subseteq \mathbb{A}'$ è un SSA passante per $f(Q)$ e di giacitura $\varphi(W)$.

Dim.: $f(S) \subseteq S'$ $\quad P \in S$ arbitrario, $\boxed{\overrightarrow{QP} \in W}$

$$f(P) \overset{?}{\in} S' \quad , \quad S' \ni f(Q), \quad W_{S'} = \varphi(W)$$

$$\Updownarrow$$

per def. $\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(Q)f(P)} \in W_{S'} = \varphi(W)$ sì è vero

per definizione di applicazione affine

$\boxed{f(S) \supseteq S'}$ $\quad$ Sia $R \in S'$, $S' : f(Q)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{f(Q)R} \in W_{S'} = \varphi(W)$$

$\Rightarrow \exists\, w \in W$ t.c. $\overrightarrow{f(Q)\,R} = f(w)$

w : per $\boxed{SA1}$, $\exists!\, P \in \mathbb{A}$

t.c. $w = \overrightarrow{QP} \in W \Rightarrow P \in S$

$\xRightarrow{\text{def. app. affine}}$ $f(w) = \overrightarrow{f(Q)\,f(P)}$

$=$

$\Downarrow$

$R = f(P)$

$P \in S$

COR.: Le applicazioni affini f mantengono alcune proprietà geometriche :

- essere SSA
- se f è un isomorfismo, $S \subseteq \mathbb{A}$ SSA

  $\dim(S) = \dim f(S)$
- Se $S_1 \parallel S_2 \Rightarrow f(S_1) \parallel f(S_2)$
- f isomorfismo affine

  Se $\{T_0, .., T_m\}$ sono allineati

  $\Rightarrow \{f(T_0), ..., f(T_m)\}$ sono allineati

diremo che f isom. aff. è anche una

COLLINEAZIONE.

Oss. Se $f: A \to A'$ non è iniettiva, può succedere di tutto.

Analogo al caso lineare $f: V \to V'$ lineare

non iniettiva. $\iff$ $\ker f \supsetneq \{0_V\}$

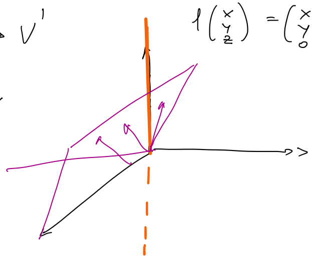
$W \subseteq V$ SSV

$f|_W : W \to V'$

restrizione a W

es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$



$\ker f = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

se $W \not\supseteq \ker f$ $\Rightarrow$ $f|_W : W \to V'$ è iniettiva

$(W \cap \ker f = \{0_V\})$

se $\dim(W \cap \ker f) \geq 1$ $\Rightarrow$ $f|_W$ non è iniettiva

Esercizio: $f: V \to V'$, $W \subseteq V$ SSV

cons $f|_W : W \to V'$

allora $\ker(f|_W) = \ker f \cap W$

Teorema di Struttura per affinità:

Sia $\mathbb{A}$ SA su V, $\dim V = n = \dim \mathbb{A}$

Sia $\{P_0, \dots, P_n\}$ punti affinemente indipendenti
$\left(\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \text{ sono LIN. INDIP.} \right)$

e sia $\{Q_0, \dots, Q_n\}$ punti aff. indipendenti

$\Rightarrow \exists!$ affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$

t.c. $f(P_i) = f(Q_i)$ $\forall i = 0, \dots, n$

Dim. Conseguenza del Teorema di Struttura per AL

Infatti: $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}$ sono base di V
$= v_1, \dots, v_n$

$\overrightarrow{Q_0Q}, \dots, \overrightarrow{Q_0Q_n}$ base di V
$w_1, \dots, w_n$

$\exists!\ f : V \to V$ AL
$f(v_i) = w_i$

Siccome $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ base di V
$\Rightarrow f$ è isom. lineare

definiamo $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$
come l'unica trasf. affine t.c.

$$\boxed{f(P_0) = Q_0}$$

e con parte lineare f.

f è isomorfismo, perché f è isom.

Rimane da dimostrare

$f(P_1) = Q_1, \dots, f(P_n) = Q_n$

$$\overrightarrow{f(P_0)f(P_1)} = f(\underbrace{\overrightarrow{P_0P_1}}_{v_1}) = w_1 = \overrightarrow{Q_0Q_1}$$

$$\overset{!}{=} \overrightarrow{f(P_0)Q_1}$$

$\boxed{SA1}$

$\Downarrow$

$f(P_1) = Q_1$

analog. $f(P_i) = Q_i$

Infine : unicità : segue dall'unicità di f

Se $g : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ con le stesse proprietà di f

$$g(P_i) = f(P_i) = Q_i \quad \forall i = 0, \dots, n$$

$$g(P_0) = Q_0 = f(P_0)$$

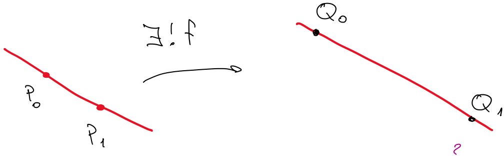
$$\overrightarrow{g(P_0)\,g(P_i)} = f_g(\overrightarrow{P_0P_i}) = f_g(v_i)$$

$$= \overrightarrow{f(P_0)\,f(P_i)} = f(\overrightarrow{P_0P_i}) = f(v_i) = w_i$$

$\Rightarrow f = f_g$

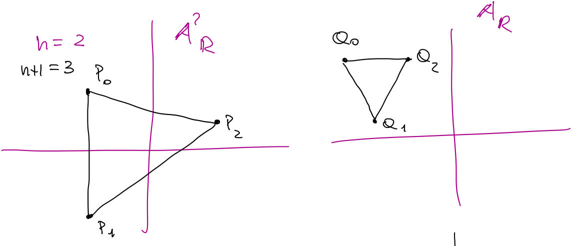
Esempio :

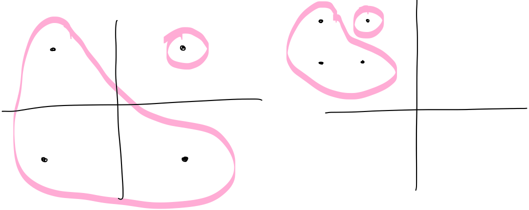
$n=1$



$n = 2$

$n+1 = 3$





RAPPR. NUMERICHE DI APPLIC. AFFINI

Cons. il caso di SA standard

$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e $\mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$

$(=\mathbb{K}^n)$ $(=\mathbb{K}^m)$

$\sigma(P,Q)=\overrightarrow{PQ}$

$P=(p_1,\dots,p_n)$

$Q=(q_1,\dots,q_n)$

$$\overrightarrow{PQ} := \begin{pmatrix} q_1-p_1 \\ \vdots \\ q_n-p_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Sia $f:\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$

affine

$f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ parte lineare

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = f(\overrightarrow{PQ})$$

Fissiamo $P = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n_K$

$= O$

$$f(O) =: C = (c_1, \dots, c_m)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 - 0 \\ q_2 - 0 \\ \vdots \\ q_n - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

$$l(\overrightarrow{OQ}) = l\left(\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right), \quad l : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

lineare $\Rightarrow$ $l = L_A$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$\downarrow$

moltiplicazione per A

$$l\left(\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}}}_{m \times 1} \in \mathbb{K}^m$$

$$= l(\overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{f(O)f(Q)} = \overrightarrow{C f(Q)} \in \mathbb{K}^m$$

$$\downarrow$$

$$Q = (x_1, \dots, x_n)$$

$$f(Q) = (y_1, \dots, y_m)$$

$$f(O) = C = (c_1, \dots, c_m) \qquad \begin{pmatrix} y_1 - c_1 \\ y_2 - c_2 \\ \vdots \\ y_m - c_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 - c_1 \\ y_2 - c_2 \\ \vdots \\ y_m - c_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eq. vettoriale di f

$$\begin{cases} y_1 = c_1 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ y_m = c_m + a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{cases}$$

eq. SCALARI di f

TRASF. AFFINI in SA arbitrari

$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, $\dim \mathbb{A} = n$

$\dim \mathbb{A}' = m$

Fisso sist. rif. affine in $\mathbb{A}$: $(O; v_1, \dots, v_n)$

$\mathbb{A}'$: $(O'; w_1, \dots, w_m)$

e scrivo tutto in coordinate risp. a sist. di riferimento

$$f(O) = C \in \mathbb{A}'$$

$$\overrightarrow{f(O)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{OQ})$$

e troviamo eq. simili