Lezione 17 marzo 2026

martedì 17 marzo 2026 11:11

Visto: applicazioni affini, isomorfismi affini

vediamo esempi

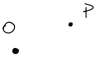
Def.: Funzioni coordinate

$\mathbb{A}$ sp. aff. su V sv su $\mathbb{K}$

$\dim \mathbb{A} = n = \dim V$

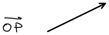
Sia $\Sigma = (O; v_1, \dots, v_n)$ un riferimento affine (ricordo $O \in \mathbb{A}$, $\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{B}$ base di V)

$\forall P \in \mathbb{A}$, **COORDINATE** di P risp. Σ sono

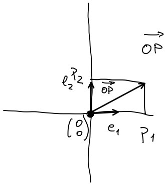


$P(p_1, \dots, p_n)$ t.c.

$\overrightarrow{OP} = p_1 v_1 + \dots + p_n v_n$



COORDINATE DI $\overrightarrow{OP}$



$\overrightarrow{OP} = p_1 e_1 + p_2 e_2$

Def.: La funzione

$$f_\Sigma : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$$

$$(= \mathbb{K}^n)$$

$f_\Sigma(P) = (p_1, \dots, p_n)$ coord. risp. a Σ

si dice FUNZIONE COORDINATE.

LEMMA: f_Σ è un isomorfismo affine, con parte lineare $f_B : V \to K^n$

dove f_B è la AL coordinate,

cioè $f_B(v) = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, dove $v = p_1 v_1 + \dots + p_n v_n$

Dim.: Dobbiamo dimostrare $\forall\, P, Q \in A$

$$f_B(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f_\Sigma(P)\, f_\Sigma(Q)}$$

$$f_\Sigma(P) = (p_1, \dots, p_n) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = p_1 v_1 + \dots + p_n v_n$$

$$f_\Sigma(Q) = (q_1, \dots, q_n) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OQ} = q_1 v_1 + \dots + q_n v_n$$

$$f_\Sigma(O) = (0, \dots, 0) \qquad \overrightarrow{OO} = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$\underbrace{\overrightarrow{f_\Sigma(P)\, f_\Sigma(Q)}}_{} = \overrightarrow{f_\Sigma(P)\, f_\Sigma(O)} + \overrightarrow{f_\Sigma(O)\, f_\Sigma(Q)}$$

$$= -\overrightarrow{\underset{=(0,\dots,0)}{f_\Sigma(O)}\, \underset{(p_1,\dots,p_n)}{f_\Sigma(P)}} + \overrightarrow{\underset{(0,\dots,0)}{f_\Sigma(O)}\, \underset{(q_1,\dots,q_n)}{f_\Sigma(Q)}}$$

$$\overset{!}{=} - \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ \vdots \\ p_n - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 - 0 \\ \vdots \\ q_n - 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = f_B(\overrightarrow{PQ})$$

$\overrightarrow{PQ} \in V$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$

$$= -(p_1 v_1 + \dots + p_n v_1) + (q_1 v_1 + \dots + q_n v_1)$$

$$\overset{!}{=} \boxed{(q_1 - p_1) v_1 + \dots + (q_n - p_n) v_n}$$

Inoltre: da Geo 1 sappiamo che f_B è un isom. di SV

$\Rightarrow f_\Sigma$ è isomorfismo affine.

Esempio: OMOTETIE

Ricordo: OMOTETIE LINEARI: sia $\alpha \in K$

$$\omega_\alpha : V \to V$$

$$\omega_\alpha(v) = \alpha \cdot v \qquad \forall\, v \in V$$

Oss. $\forall$ $\mathcal{B}$ base di V,

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\omega_\alpha) = \alpha \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{matrice UNITÀ}}}{\mathbb{I}_n} = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \alpha \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$$

se $\alpha \neq 0$, ω_α è un ISOM. LINEARE.

Def.: OMOTETIA AFFINE di RAPPORTO α e CENTRO $C \in A$

l'applicazione affine

$$\omega_{\alpha,C} : A \to A$$

tale che: $\omega_{\alpha,C}(C) = C$

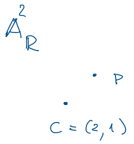
e con parte lineare ω_α

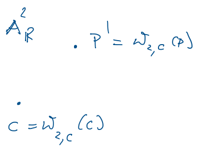
cioè $\forall P \in A$

$$\overrightarrow{\underbrace{\omega_{\alpha,C}(C)}_{=C}\ \omega_{\alpha,C}(P)} = \omega_\alpha(\overrightarrow{CP}) = \alpha \cdot \overrightarrow{CP}$$

quindi: $\overrightarrow{C\ \omega_{\alpha,C}(P)} = \alpha \cdot \overrightarrow{CP}$

Es. $\alpha = 2$, $C = (2,1) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$



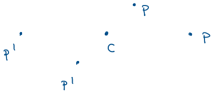


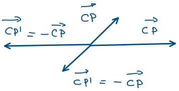
Infatti:

$\vec{CP}$
$2\,\vec{CP}$

OSS. se $\alpha \neq 0$, $\omega_{\alpha,C}$ è un ISOMORFISMO AFF.

Def.: Se $\alpha = -1$, l'affinità $\omega_{-1,C}$ si dice **SIMMETRIA DI CENTRO C.**





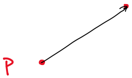
Ricordo: $\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$

$$\sigma(P,Q) = \vec{PQ} \in V$$

visto: se fisso P, $\sigma_P : \mathbb{A} \to V$

è biiezione

$$Q \to \vec{PQ}$$



EQUAZIONI PER OMOTETIE AFFINI

$\mathbb{A} = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $C = (c_1, .., c_n)$

$\alpha \in \mathbb{K}$, scrivo $\omega_{\alpha,C}$ in

componenti:

$P = (x_1, .., x_n)$, $\omega_{\alpha,C}(P) = (y_1, .., y_n)$

$$\overrightarrow{C\,\omega_{\alpha,C}(P)} = \alpha \cdot \vec{CP}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1 - c_1 \\ \vdots \\ y_n - c_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 - c_1 \\ \vdots \\ x_n - c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 - c_1 = \alpha (x_1 - c_1) \\ \vdots \\ y_n - c_n = \alpha (x_n - c_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = c_1 + \alpha (x_1 - c_1) \\ \vdots \\ y_n = c_n + \alpha (x_n - c_n) \end{cases}$$

SPAZI AFFINI REALI

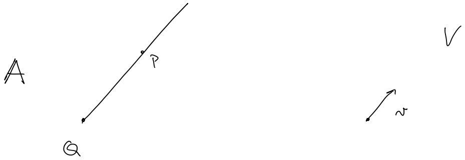
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Ricordo che $\mathbb{R}$ è un campo ordinato. $\mathbb{A}$ SA di dim $\mathbb{A} = n$

Def.: SEMIRETTA di ORIGINE a e direzione $v \in V \setminus \{0_V\}$

è:

$$\{P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{QP} = t v, \; t \in \mathbb{R}, \; t \geq 0\}$$

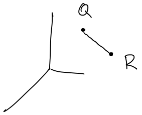


SEMIRETTA OPPOSTA

$$\{P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{QP} = t v, \; t \leq 0\}$$
$$t \in \mathbb{R}$$

DEF.: Segmento di estremi $\overline{QR} \in \mathbb{A}$

$$\overline{QR} := \{P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{QP} = t \, \overrightarrow{QR}, \; 0 \leq t \leq 1\}$$



Ricordo che

retta affine per Q e R

$$r = \{ P \in \mathbb{A} \ : \ \overrightarrow{QP} = t \cdot \overrightarrow{QR} \}$$

PROP.: Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $f \in Aff(\mathbb{A})$

$Q, R \in \mathbb{A}$ arbitrari

$$\Longrightarrow \quad f(\overline{QR}) = \overline{f(Q)\, f(R)}$$

cioè: l'immagine di un segmento è un segmento con estremi i punti immagine dei 2 estremi

Dim. f affinità $\Rightarrow$ f è isomorfismo

Mostriamo $f(\overline{QR}) \subseteq \overline{f(Q)\, f(R)}$

$P \in \overline{QR}$, $\exists\ \bar{t} : 0 \le \bar{t} \le 1$ t.c.

$$\overrightarrow{QP} = \bar{t} \cdot \overrightarrow{QR}$$

$$f(\overrightarrow{QP}) = f(\bar{t} \cdot \overrightarrow{QR}) = \bar{t} \cdot f(\overrightarrow{QR})$$

$$\overset{\parallel}{\overrightarrow{f(Q)\, \underline{f(P)}}} \qquad = \underline{\bar{t}} \cdot \overrightarrow{f(Q)\, f(R)}$$

$\Longrightarrow$ per def. di segmento

$$f(P) \in \overline{f(Q)\, f(R)}$$

Viceversa: esercizio: f affinità $\Rightarrow$ f^{-1} è affinità

con parte lineare f^{-1}; applico stesso ragionamento a f^{-1} e trovo

$$\overline{f(Q)\, f(R)} \subseteq f(\overline{QR})$$

DEF. Sia $\overline{QR}$ segmento; definiamo il

PUNTO MEDIO $M \in \overline{QR}$

M è l'unico punto t.c.

$$\vec{QM} = \frac{1}{2}\,\vec{QR}$$

Def.: Dati $A, B, C \in \mathbb{A}$ su $\mathbb{R}$

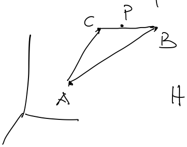
NON ALLINEATI

Il TRIANGOLO DI VERTICI

A, B, C

$$\underset{(\Delta ABC)}{\overline{ABC}} := \{P \in \mathbb{A} : \vec{AP} = t\cdot\vec{AB} + s\,\vec{AC}\ \underbrace{\text{con } 0\le t\le 1,\ 0\le s\le 1, \text{ e } 0\le t+s\le 1}_{\text{COMBINAZIONE LINEARE CONVESSA}}\}$$

Ricorda: piano per A, B, C : H



$$H = \{P \in \mathbb{A} : \vec{AP} = t\cdot\vec{AB} + s\cdot\vec{AC}\}$$
$$t, s \in \mathbb{R}$$

PROP.: $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$

$$f(\overline{ABC}) = \overline{f(A)\,f(B)\,f(C)}$$