# Lezione 18 marzo 2026

mercoledì 18 marzo 2026 11:14

Sp. affini reali.

Visto : TRIANGOLO : $A, B, C \in \mathbb{A}$ non allineati

$$\overline{ABC} = \{ P \in \mathbb{A} : \vec{AP} = t\,\vec{AB} + s \cdot \vec{AC} \}$$

$0 \leq t \leq 1$

$0 \leq s \leq 1$

$t + s \leq 1$

Prop.: $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ ; $\forall$ triangolo $\overline{ABC}$,

$$f(\overline{ABC}) = \overline{f(A)\,f(B)\,f(C)}$$

OSS.: $A, B, C$ non allineati

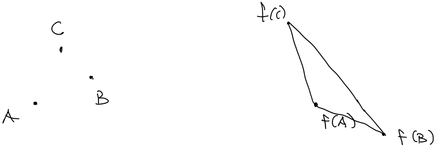
$\rightarrow$ $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ non proporzionali, LIN. INDIP.

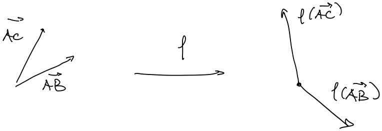
Come sono $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$?

$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\vec{AB})$ con $\varphi$ isom. lineare $\Rightarrow$ manda

$\overrightarrow{f(A)f(C)} = \varphi(\vec{AC})$ vettori LIN. INDIP.

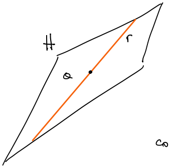
in vettori LIN. INDIP.





OSS. : Possiamo anche introdurre semipiani, semispazi, ...

Es.: sia $H \subseteq \mathbb{A}$ un piano affine; voglio definire 2 semipiani



Idea: scelgo una param. di $H$ in modo opportuno

se $r = \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} \in \mathrm{Span}(v)\}$

con $v$ vettore direzione di $r$

scelgo par. di $H$ del tipo $H = \{P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{QP} \in \mathrm{Span}(v, u)\}$

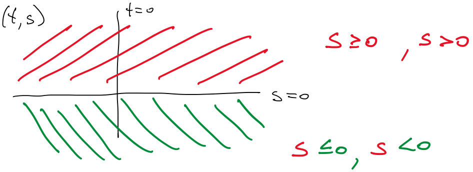
con $u$ non proporzionale a $v$

$$P = (x_1, \dots, x_n) \qquad v = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

$$Q = (q_1, \dots, q_n) \qquad u = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t l_1 + s m_1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = q_n + t l_n + s m_n \end{cases}$$

Se $s=0$, $t \in \mathbb{R}$, trovo tutti i punti di $r$



SEMIPIANO nella direzione di $u$

è dato da $\{P \in \mathbb{A} : \overrightarrow{QP} = tv + su,\ s \geq 0\}$

oss. $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$, $f(\text{semipiano}) = \text{semipiano}$

Vediamo una generalizz. dei triangoli:

Def.: Sia $k \geq 0$, esiano $A_0, .., A_k \in \mathbb{A}$

punti AFFIN. INDIP.

($\iff \overrightarrow{A_0A_1}, .., \overrightarrow{A_0A_k}$ sono LIN. INDIP.)

Allora il k-SIMPLESSO DI

VERTICI $A_0, .., A_k$ è l'insieme

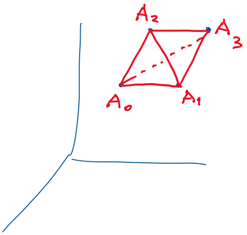
$$\Delta_k := \left\{ P \in \mathbb{A} \; : \; \overrightarrow{A_0P} = \overbrace{t_1 \overrightarrow{A_0A_1} + .. + t_k \overrightarrow{A_0A_k}}^{\text{COMB. LINEARE CONVESSA}} \text{ con } \boxed{t_i \geq 0} \;\; \forall i = 1, .., k \text{ e } \boxed{\sum_{i=1}^{k} t_i \leq 1} \right\}$$

Es: $k = 0$ : 0-simplesso = punto

$k = 1$ 1-simplesso = segmento $\overline{A_0A_1}$

$k = 2$ 2-simplesso = triangolo

$k = 3$ 3-simplesso = tetraedro



oss: $f \in Aff(\mathbb{A})$

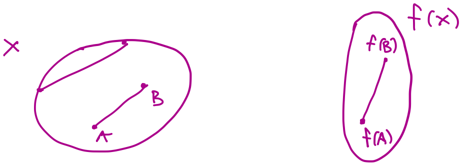
$\Rightarrow f(\Delta_k)$ è un k-simplesso.

Vediamo più in generale la nozione di CONVESSITÀ:

Def.: $X \subseteq \mathbb{A}$ si dice CONVESSO se $\forall A, B \in X$, si ha

$$\overline{AB} \subseteq X$$

Prop.: $\left.\begin{array}{l} f \in \mathrm{Aff}(A), \\ X \text{ convesso} \end{array}\right) \longrightarrow f(X)$ è convesso.



OSS. (Esercizio) i $k$-simplessi sono CONVESSI.

* * *

Ora torniamo al caso generale $\mathbb{K}$ arbitrario

Vogliamo ora definire le PROIEZIONI di uno SPAZIO AFFINE su un SOTTOSPAZIO AFFINE

Richiamo: PROIEZ. LINEARI

$V$ sv su $\mathbb{K}$; siano $U, W \subseteq V$ ssv COMPLEMENTARI, cioè

$$U \oplus W = V$$

(cioè: $U + W = V$, $U \cap W = \{0_V\}$ )

$\iff \forall v \in V, \ \exists!\, u \in U, \ \exists!\, w \in W$

t.c. $\underline{v = u + w}$

**Def.**: Le app. lineari

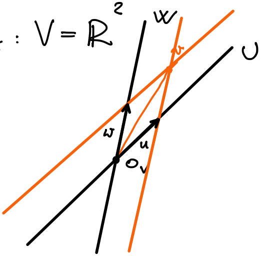
$\pi_U : V \longrightarrow U, \quad \pi_U(v) = \pi_U(u+w) = u$

$\pi_W : V \longrightarrow W, \quad \pi_W(v) = w$

si dicono $\pi_U$ : proiezione lineare su $U$, della direzione di $W$

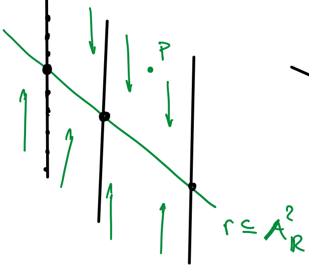
$\pi_W$ : proiezione lineare su $W$, della direzione di $U$

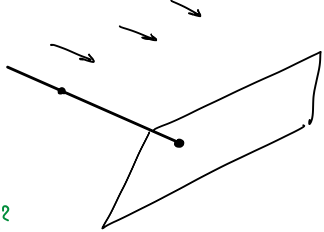
Es.: $V = \mathbb{R}^2$



Voglio def. PROI. AFFINI

Es. $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$





**Def.:** $\mathbb{A}$ su $V$, $V$ sv su $\mathbb{K}$

Sia $S \subseteq \mathbb{A}$ SSA di dim $k \geq 1$

sia $W$ la giacitura di $S$.

$W \subseteq V$.

Se $U$ è SSV complementare di $W$,

cioè $U \oplus W = V$

Si dice PROIEZIONE su $S$ parallela a $U$ l'applicazione

$$\boxed{\begin{array}{l} p_W : \mathbb{A} \to S, \quad \text{data da} \\ p_W(P) = \underbrace{T_P(U)}_{\substack{\text{l'unico SSA} \\ \text{passante per } P \\ \text{e con giacitura } U}} \cap S \end{array}}$$

LEMMA: $\forall P \in \mathbb{A}$, $T_P(U) \cap S = \{P'\}$

Dim.: Visto: se $T$ e $S$ sono sott. affini con giaciture $U$, $W$, t.c. $U+W=V \longrightarrow T\cap S \neq \emptyset$

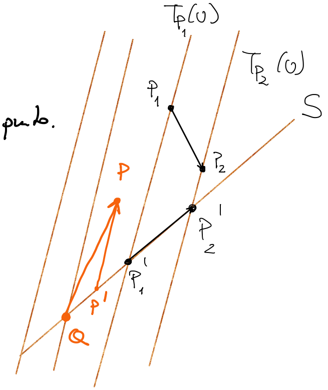
Nel nostro caso è verificata, quindi $T_P(U)\cap S \neq \emptyset$

Visto: se $T\cap S\neq\emptyset$, $T\cap S$ è SSA con

giacitura $\cap$ delle 2 giaciture.

Nel nostro caso: $U\cap W = \{0_V\}$

$\Rightarrow \dim T\cap S = \dim\{0_V\} = 0$, cioè è un punto.



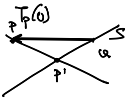
Lemma: $P_W$ è applicazione affine

con parte lineare $\Pi_W$.

Dim: $\boxed{\underline{P\in A}}$, $\boxed{\overrightarrow{QP} = v \in V} \underline{= \boxed{u} + \boxed{w}}$, $Q\in S$

e sia $\underline{P' = P_W(P)}$ allora $\underline{\overrightarrow{QP'} = w}$

infatti: $P' = T_P(U)\cap S$



$$\boxed{\overrightarrow{QP}} = \underline{\overrightarrow{QP'}} + \underline{\overrightarrow{P'P}} \qquad = w + u$$

$Q, P' \in S \implies \overrightarrow{QP'} \in W$

$P', P \in T_P(U) \implies \overrightarrow{P'P} \in U$

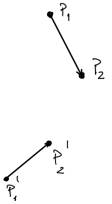
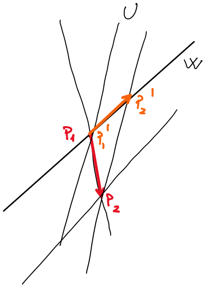
$\overrightarrow{QP_1} = u_1 + w_1$

$\overrightarrow{QP_2} = u_2 + w_2$

$QP_1' = w_1$

$QP_2' = w_2$

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\overrightarrow{P_1P_2}} = -u_1 - w_1 + u_2 + w_2 \\ &\boxed{\overrightarrow{P_1'P_2'}} = -w_1 + w_2 \\ &= \overrightarrow{P_W(P_1)\,P_W(P_2)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\overrightarrow{P_1P_2})\ \cancel{f}(\underbrace{(u_2-u_1)}_{\in U} + \underbrace{(w_2-w_1)}_{\in W})$$

$= w_2 - w_1$