Lezione 19 marzo 2026

giovedì 19 marzo 2026 11:12

GEOMETRIA EUCLIDEA

Idea: Restringerci a spazi affini su uno SV V che sia SPAZIO EUCLIDEO (caso $K = \mathbb{R}$), ovvero SPAZIO UNITARIO (caso $K = \mathbb{C}$)

Facciamo dei richiami:

DEF.: V SV su $\mathbb{R}$

$g : V \times V \to \mathbb{R}$ si dice BILINEARE e SIMMETRICA se:

① g è lineare in ogni variabile, cioè

$$\forall v \in V,\ g(v, \cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longrightarrow g(v, w) \text{ è AL}$$

$$\forall v' \in V,\ g(\cdot, v') : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ è AL}$$
$$w \longrightarrow g(w, v')$$

② $\forall\, v, w \in V,\quad g(v, w) = g(w, v)$

Def.: g forma bilineare simmetrica è un PRODOTTO $\underset{\perp}{\overset{PS}{\text{SCALARE}}}$ se è DEFINITA POSITIVA, cioè:

$$\forall v \in V,\quad g(v, v) \geq 0$$

$$\text{e} \quad g(v, v) = 0 \iff v = 0_V$$

Def.: V SV su $\mathbb{R}$, g un PS, la NORMA INDOTTA da g è:

$$\|v\|_g := \sqrt{g(v, v)}$$

$\|\cdot\|_g : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

LEMMA: ⓐ $\|v\|_g \geq 0 \quad \forall\, v \in V$

ⓑ $\|v\|_g = 0 \iff v = 0_V$

ⓒ $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

TEOREMA: $\forall\, v, w \in V$, si ha

$$\|v + w\|_g \leq \|v\|_g + \|w\|_g$$

* * *

Caso particolare: $V = \mathbb{R}^n$, possiamo cons.

il PRODOTTO SCALARE

STANDARD (PSS)

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right) := a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$g\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) = a_1^2 + \dots + a_n^2 = \sum a_i^2 \geq 0$$

$$= 0 \iff a_i = 0 \ \forall i$$

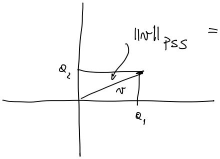
SCRIVEREMO

$$g\left(\underset{\substack{\parallel \\ v}}{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}, \underset{\substack{\parallel \\ w}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= v \cdot w = \langle v, w \rangle$$

Inoltre: $\|v\|_{PSS} = \sqrt{\sum a_i^2}$

$n = 2$



$\|v\|_{PSS}$ = lunghezza risp. distanza euclidea del segmento

CASO COMPLESSO:

Def.: V sv su $\mathbb{C}$. Una **FORMA SESQUILINEARE HERMITIANA** su V è un'applicazione

$$g : V \times V \to \mathbb{C}$$

(i) sesquil.: additiva in ciascuna variabile, e inoltre

$$g(\lambda v, w) = \lambda\, g(v, w)$$

$$g(v, \mu w) = \boxed{\bar{\mu}}\, g(v, w)$$

→ complesso coniugato

(ii) hermitiana: $g(v, w) = \overline{g(w, v)}$ → complesso coniugato

Richiamo: $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $\bar{z} = a - ib$.

Def.: g forma sesquilin. e hermitiana, si dice **PRODOTTO SCALARE** su V

se è **DEFINITA POSITIVA**, cioè

$$\forall v \in V, \quad g(v, v) \geq 0$$

$$\text{e} \quad g(v, v) = 0 \iff v = 0_V$$

OSS.: la hermitianità $g(v, w) = \overline{g(w, v)}$

implica $g(v, v) = \overline{g(v, v)} \Rightarrow g(v, v) \in \mathbb{R}$

$a+ib = a-ib \iff b=0$

Def: V sv su $\mathbb{C}$ con PS g si dice SPAZIO UNITARIO.

Poss. def. $\|v\|_g := \sqrt{g(v,v)}$

* * *

Caso particolare $V=\mathbb{C}^n$, possiamo cons. PRODOTTO SCALARE STANDARD COMPLESSO

$$g : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\right) := z_1\cdot\overline{w_1} + z_2\cdot\overline{w_2} + \dots + z_n\cdot\overline{w_n} = \sum_{i=1}^{n} z_i\cdot\overline{w_i}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{j=1}^{n} z_j\,\overline{z_j} = \sum_{j=1}^{n} (a_j^2 + b_j^2) \geq 0$$

$z_j = a_j + i b_j$, $\quad \overline{z_j} = a_j - i b_j$

$z_j\cdot\overline{z_j} = a_j^2 + b_j^2$

* * *

Vogliamo ora definire ANGOLI tra vettori non nulli. Ci serve:

TEO.: Diseg. di Cauchy-Schwarz
g è PS su V euclideo opp. unitario

allora $\forall\, v, w \in V$

$$|g(v,w)| \le \|v\| \cdot \|w\|$$

↓ valore ass. se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
ovvero modulo di $g(v,w) \in \mathbb{C}$
come numero complesso.

OSS.: se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\|v\| \neq 0$, $\|w\| \neq 0$

ottengo $$\frac{|g(v,w)|}{\|v\| \cdot \|w\|} \le 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 \le \frac{g(v,w)}{\|v\|\,\|w\|} \le 1$$

cons. $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$

DEF. Se $v \neq 0_V$, $w \neq 0_V$

$\Rightarrow$ ANGOLO CONVESSO

$$\theta = \widehat{vw} := \arccos \frac{g(v,w)}{\|v\|\,\|w\|}$$

$$\cos\theta = \frac{g(v,w)}{\|v\|\,\|w\|},$$

$$g(v,w) = \|v\|\,\|w\| \cos\theta .$$

Def.: v e w si dicono ORTOGONALI

se $g(v,w) = 0$

* * *

FORMULA DI POLARIZZAZIONE
EUCLIDEO ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

Sia g un PS su V, $\|\cdot\|_g$ norma associata.

Allora, $\forall\, v, w \in V$

$$\|v+w\|_g^2 = g(v+w, v+w)$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{g(v,v)}_{=\|v\|_g^2} + 2\,g(v,w) + \underbrace{g(w,w)}_{=\|w\|_g^2}$$

$$\Rightarrow g(v,w) = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|_g^2 - \|v\|_g^2 - \|w\|_g^2\right)$$

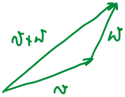
FORMULA DI POLARIZZAZIONE

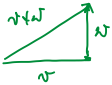
OSS.: Se v e w sono ortogonali,

$g(v,w) = 0$

$$\boxed{\|v+w\|_g^2 = \|v\|_g^2 + \|w\|_g^2}$$

TEOREMA DI PITAGORA





Se v e w non sono ortogonali

$$\|v+w\|_g^2 = \|v\|_g^2 + \|w\|_g^2 + 2\,\|v\|\,\|w\|\cos\theta$$

TEOREMA DEL COSENO.

Esempi: $V = \mathbb{R}[x]$ è un $\mathbb{R}$-SV di dim infinita

Possiamo def. un PS

$$g : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g\left(p(x), q(x)\right) := \int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$$

$$\|p(x)\| = \sqrt{\int_0^1 p^2(x)\,dx}$$