Lezione 24 marzo 2026

martedì 24 marzo 2026 11:15

Esercizi e commenti:

Foglio ④ :

Esercizio 6 :

$$f : \underset{(x,y)}{\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}} \to \underset{(X,Y)}{\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}}$$

$$f(x,y) = (x+y,\ y+1)$$

Dimostrare che $\nexists$ retta $r \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ t.c.

$$f(r) = r$$

Sia $r \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ retta arbitraria in eq. parametriche

$$r: \begin{cases} x = q_1 + t l_1 \\ y = q_2 + t l_2 \end{cases}$$

$Q = (q_1, q_2)$, $v = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$

il generico punto di $f(r)$:

$$f(q_1 + tl_1,\ q_2 + tl_2) = (q_1 + tl_1 + q_2 + tl_2,\ q_2 + tl_2 + 1)$$

$f(r)$ è una retta s di eq.:

$$\begin{cases} X = q_1 + q_2 + t \cdot (l_1 + l_2) \\ Y = q_2 + 1 + t\, l_2 \end{cases}$$

$s \ni (q_1 + q_2,\ q_2 + 1)$, vett. direzione $\begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ l_2 \end{pmatrix}$

$s = r \iff (q_1 + q_2,\ q_2 + 1) \in r$

e $\begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ l_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = \lambda l_1 \\ l_2 = \lambda l_2 \end{cases}$$

$l_2 \neq 0$ NO

$l_2 = 0$, $l_1 = \lambda l_1 \Rightarrow \lambda = 1$

$\Rightarrow l_1 \neq 0$; possiamo supp. $\begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(q_1 + q_2,\ q_2 + 1) \in r \iff \exists\, \bar{t}$:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = q_1 + \bar{t} \\ q_2 + 1 = q_2 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

$$f(x,y) = (x+y,\ y+1) = (X, Y)$$

$$\begin{cases} X = x+y \\ Y = y+1 \end{cases}$$

in generale $$\underset{\substack{\downarrow \\ f(x,y)}}{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}} = \underset{\substack{\downarrow \\ f(0,0)}}{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{inv.}}}{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X - c_1 \\ Y - c_2 \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{parte lineare}}$$

$$= \overrightarrow{f(0,0)\, f(x,y)}$$

$$\overrightarrow{f(O) f(P)} = f(\overrightarrow{OP})$$

$P = (x,y)$, $O = (0,0)$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X = x+y \\ Y = y+1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X - 0 \\ Y - 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ è un vettore di direz. per retta piena, la retta immagine ha come vettore di direzione $A \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ l_2 \end{pmatrix}$

in particolare, $f(r) \,/\!/\, r \iff \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ è autovettore per A

$$\underbrace{A \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}}_{} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ c'è sempre almeno 1 autovettore

in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ non necessariamente, ad es.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad 0 < \theta < \pi$$

PUNTI FISSI PER AFFINITÀ:

$$f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$$

$$(x, y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

$$\begin{cases} X = \overbrace{C_1 + a_{11}x + a_{12}y}^{=f_1(x,y)} \\ y = \underbrace{C_2 + a_{21}x + a_{22}y}_{f_2(x,y)} \end{cases}$$

$P = (p_1, p_2)$; quando $f(P) = P$?

$$C_1 + a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = p_1$$
$$C_2 + a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = p_2$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(A - \mathbb{I}_2)} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg} \leq 1 \Longleftrightarrow 1$ è autovalore di $A \Longrightarrow$ il SL $(A - \mathbb{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{rg} = 1$:
  - non compatibile
  - compatibile, e l'ins. delle soluzioni dipende da 1 parametro $\Rightarrow$ è una retta
- $\underbrace{\mathrm{rg} = 0}$

$\Downarrow$

$$\mathrm{rg}(A - \mathbb{I}_2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow A - \mathbb{I}_2 = 0 \text{ matrice nulla}$$

$$A = \mathbb{I}_2$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg} = 2 \Longleftrightarrow 1$ non è autovalore di $A \Longrightarrow$ il SL

$$(A - \mathbb{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

è di CRAMER

e ha 1! soluzione $\forall -\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ se $A = \mathbb{I}_2$,

- se $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nessun punto fisso
- se $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$0 \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ tutti i punti P sono fissi

Ricordo: f aff. con parte lineare identità sono esattamente: le TRASLAZIONI

$$\begin{cases} X = c_1 + x \\ Y = c_2 + y \end{cases} \qquad \text{se } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $f = t_v$, se $v = 0_V$, tutti i punti sono fissi;

se $v \neq 0_V$, nessun punto fisso

Esempio di prima:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$= (1-x)^2$$

$\lambda = 1$ è autovalore

$$(A - \mathbb{I}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

la matrice completa è

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{rg = 1} \middle| \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}\right)}$$

$rg = 2$

RC $\Rightarrow$ non è compatibile

Se invece cons. l'affinità: A

Se $-\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\tilde{f}: \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}(x,y) = (x+y+3,\ y)$$

$$(A - \mathbb{I}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ le soluzioni formano una retta affine

$r: \quad y = -3$ è una retta di $A^2_{\mathbb{C}}$

Tutta di punti fissi

infatti $\begin{cases} x = t \\ y = -3 \end{cases}$

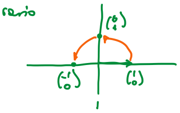
$$\tilde{f}(t, -3) = (t - 3 + 3,\ -3) = (t, -3)$$

Infine: esibiamo un esempio in cui

A non ha autovalore 1

es.: $A = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

matrice della rotazione di $\pi/2$ in senso antiorario



$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

Prendo una arbitraria affinità f con parte lineare data dalla rotazione di $\pi/2$:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X = c_1 - y \\ Y = c_2 + x \end{cases}$$

punto fisso : $P = (p_1, p_2)$ t.c.

$$\begin{cases} c_1 - p_2 = p_1 \\ c_2 + p_1 = p_2 \end{cases}$$

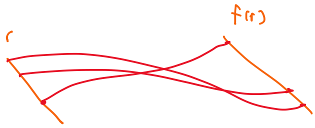
$$\begin{cases} p_1 + p_2 = c_1 \\ p_2 - p_1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{c_1 - c_2}{2} \\ p_2 = \dfrac{c_1 + c_2}{2} \end{cases}$$

~ . ~ . ~

Rette fisse per affinità:

$f : \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$

cerco r t.c. $f(r) = r$



$$r : \begin{cases} x = q_1 + l_1 t \\ y = q_2 + l_2 t \end{cases}$$

$$f : \begin{cases} x = c_1 + a_{11} x + a_{12} y \\ y = c_2 + a_{21} x + a_{22} y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(r) = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} q_1 + l_1 t \\ q_2 + l_2 t \end{pmatrix} \mid t \in K \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}} + t A \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \mid t \in K \right\}$$

$$f(r) = r \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in r \\ A \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \text{ è autovettore per } A \end{cases}$$

Caso in cui A ha 1 autovalore c
di molt. geom. 2

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = c \cdot \mathbb{I}_2$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in r$$

$$\begin{cases} c_1 + c q_1 = q_1 + l_1 \bar{t} \\ c_2 + c q_2 = q_2 + l_2 \bar{t} \end{cases}$$

Omotetie affini : parte lineare è omotetia $c \cdot \mathbb{I}_2$
e che fissano un punto $R = (r_1, r_2)$

$$\begin{cases} x = c_1 + c x \\ y = c_2 + c y \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 = c_1 + c r_1 \\ r_2 = c_1 + c r_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = (1-c) r_1 \\ c_2 = (1-c) r_2 \end{cases}$$