Lezione 25 marzo 2026

mercoledì 25 marzo 2026 11:14

Visto: PS su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$

$\| \cdot \|$

in $\mathbb{R}$: angolo convesso

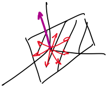
ortogonalità: $g(v, w) = 0$

Def. V sv euclideo o unitario

$W \subseteq V$ ssv

il COMPLEMENTO ORTOGONALE di W in V è

$$W^{\perp} := \{ v \in V : g(v, w) = 0 \ \forall w \in W \}$$



Sappiamo: $W \oplus W^{\perp} = V$

In particolare: $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$

OSS.: Se W_1 e W_2 ssv di V

si ha $W_1 \subseteq W_2^{\perp} \Longleftrightarrow W_2 \subseteq W_1^{\perp}$

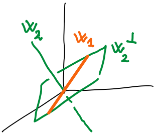
$(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Def.: $W_1, W_2 \subseteq V$ ssv

W_1 e W_2 si dicono ORTOGONALI

se $\underbrace{W_1 \subseteq W_2^{\perp}}$ $(\Leftrightarrow W_2 \subseteq W_1^{\perp})$

Es.



$W_1 \perp W_2$

OSS.: se W_1 e W_2 sono ortogonali

$\Rightarrow \dim W_1 + \dim W_2 \le \dim W_2^\perp + \dim W_2 = n$

Esempio: cons. un iperpiano in $\mathbb{R}^n$

$W: \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \quad \circledast$

come PS prendo quello standard

$\dim W = n-1$

$\dim W^\perp = n-(n-1) = 1$ retta vettoriale

Cerco un generatore per $W^\perp$, basta 1 vettore non nullo;

$$\circledast : \quad \forall v = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \in W$$

$$\underbrace{a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + \cdots + a_n \delta_n}_{\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \right\rangle} = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

PS standard

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \perp$ ogni vettore di W

$\neq \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ perché altrimenti

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

sarebbe $0=0$

$$\to W^{\perp} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\right)$$

* * *

CASO AFFINE

Idea: vogliamo parlare di ortogonalità, angoli, distanze.

Def.: V SV euclideo o unitario e $\mathbb{A}$ SA su V, $\mathbb{A}$ si dice

SPAZIO AFFINE EUCLIDEO
—"— UNITARIO : $\mathbb{E}(V)$

In particolare, se $V=\mathbb{R}^n$ con PS standard

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}^n_{\mathbb{R}}$$

se $V=\mathbb{C}^n$ con PS standard

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$$

Def.: In $\mathbb{E}(V)$, un RIFERIMENTO

CARTESIANO è un riferimento affine

$(O; v_1, \dots, v_n)$ con $\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{B}$

base ORTONORMALE di V.

Def.: $\mathbb{E}$ sp. euclideo o unitario.

$S, T \subseteq \mathbb{E}$ SSA

si dicono ORTOGONALI

se W_S e W_T sono ortogonali.

W_S: giacitura di S, W_T giac. di T.

$$(\Rightarrow \underset{\dim S}{\underset{\shortparallel}{\dim W_S}} + \dim W_T \le n$$

$$\dim S + \dim T \le n$$

Es. $\mathbb{E}^n_{\mathbb{R}}$

Cons. iperp. affine: H, dim $n-1$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

rette affini ortogonali ad H:

$$r: \quad W_r \subseteq W_H^\perp$$

$$W_H: \; a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$$

$$W_H^\perp = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) = W_r$$

$$\Rightarrow \quad r: \begin{cases} x_1 = z_1 + a_1 t \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ x_n = z_2 + a_n t \end{cases}$$

Cons. 2 rette in $E^n_{\mathbb{R}}$: r s

$$r: \begin{cases} x_1 = q_1 + l_1 t \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = q_n + l_n t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x_1 = p_1 + m_1 t \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n = p_n + m_n t \end{cases}$$

$W_r \perp W_s \iff$

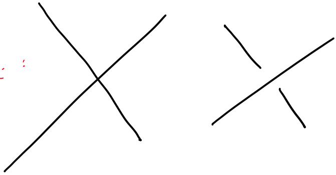
$$W_r = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}\right), \qquad W_s = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad = \left\{ \mu \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\langle \lambda \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, \mu \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\lambda \mu \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \right\rangle}_{=0} = 0$$

OSS.:



L'ortogonalità è definita anche per SSA sghembi:

Non siamo ancora soddisfatti:

vorremmo poter parlare di piani ortog. in $E^3_{\mathbb{R}}$,

ad esempio

OSS.: $S, T \subseteq E$ e supp.

$$\dim S + \dim T > \dim E = n$$

$$\shortparallel$$

$$\dim W_S + \dim W_T > n$$

$$\dim W_S^{\perp} = n - \dim W_S$$

$$\dim W_T^{\perp} = n - \dim W_T$$

$$\dim W_S^{\perp} + \dim W_T^{\perp} = n + n - \underbrace{(\dim W_S + \dim W_T)}_{> n}$$

$$< n + n - n = n$$

DEF.: Dati $S, T \subseteq E$ SSA t.c.

$$\dim S + \dim T > n$$

diremo che S è PERPENDICOLARE a T se

$$W_S^{\perp} \perp W_T^{\perp}$$, sono ortogonali

$$\left(\Rightarrow W_S^{\perp} \subseteq \left(W_T^{\perp}\right)^{\perp} = W_T \right)$$

Es: in $E^n_{\mathbb{R}}$ 2 iperpiani H_1 e H_2 sono perpendicolari se e solo se:

$$H_1 \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b \qquad H_2 \quad c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = d$$

$$\left(W_{H_1}\right)^{\perp} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right), \quad \left(W_{H_2}\right)^{\perp} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right)$$

sono ortogonali $\Longleftrightarrow \quad a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n = 0$