Lezione 31 marzo 2026

martedì 31 marzo 2026 11:14

Visto: $\mathbb{E}$ su $\mathbb{R}$: distanza tra 2 punti $d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|$

Se $H \subseteq \mathbb{E}$ è un iperpiano

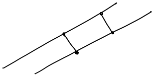
Formula $d(P,H)$ con P punto

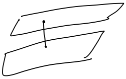
$P = (p_1, \dots, p_n)$ $\quad H : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$

$$d(P,H) = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \quad ⊛$$

* * *

Possiamo cons. anche la distanza tra iperpiani paralleli e calcolarla esplicitamente





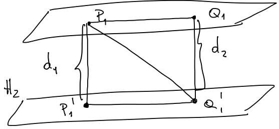
OSS.: Se $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{E}$ sono 2 iperpiani paralleli, allora la $d(H_1, H_2) = \inf\{d(P_1, P_2) : P_1 \in H_1, P_2 \in H_2\}$

$= d(P_1, H_2)$

dove $P_1 \in H_1$ è un punto qualunque del primo piano.

Infatti, se $Q_1 \in H_1$ altro punto $Q_1 \neq P_1$, usando il Teo. di Pitagora

si può verificare che $d(Q_1, H_2) = d(P_1, H_2)$



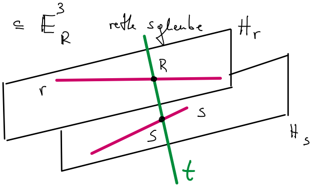
Esercizio.

- determinare P_1' e Q_1' con frontare $d(P_1', Q_1') = d(P_1, Q_1)$
- Pitagora

DISTANZA TRA RETTE SGHEMBE in $E^3_\mathbb{R}$

Teorema: $r, s \subseteq E^3_\mathbb{R}$ rette sghembe

Allora:



① $\exists!$ retta t ortogonale e incidente sia r che s

② Se $R := t \cap r$, $S := t \cap s$

allora $d(r, s) = d(R, S) = d(H_r, H_s)$

dove $H_r \parallel H_s$, $H_r \supseteq r$, $H_s \supseteq s$

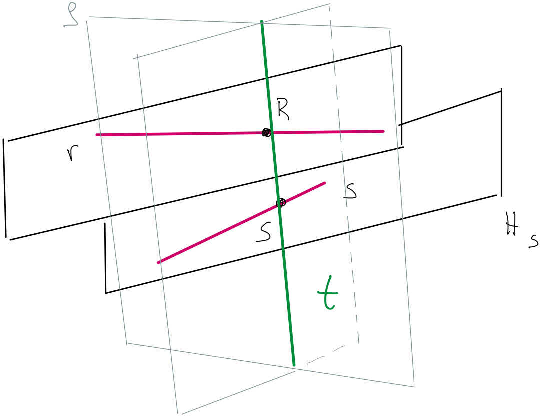
Il segmento $\overline{RS}$ si chiama SEGMENTO DI MINIMA DISTANZA.

Dim.: r: $A \in r$, v_r vettore direzione

s: $B \in s$, v_s vettore direzione

Sia $w \in \underbrace{\left(\mathrm{Span}(v_r, v_s)\right)^{\perp}}_{\dim = 1}$, $w \neq 0_V$

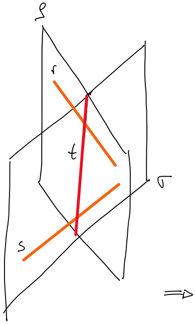
Cons. il fascio $\mathcal{F}_r$ di piani per r



e sia $\rho \in \mathcal{F}_r$ l'unico piano che contiene w nella giacitura (esercizio)

analog. $\mathcal{F}_s$ fascio di piani per s

e sia $\sigma \in \mathcal{F}_s$ che contiene w nella giacitura



Oss. che per costruzione ρ e σ non sono paralleli $\left(W_\rho = \mathrm{Span}(v_r, w) \neq W_\sigma = \mathrm{Span}(v_s, w) \right)$

$\Rightarrow \rho \cap \sigma$ è una retta

$\rho \cap \sigma = t$

Inoltre:

$r, t \subseteq \rho$, non sono parallele per costruzione

$\Rightarrow r \cap t \neq \emptyset$, $r \cap t = R$

$s, t \subseteq \sigma$, $s \nparallel t \Rightarrow s \cap t \neq \emptyset$, $s \cap t = S$

② $d(r,s) = \inf\{d(P,Q) \mid P\in r,\ Q\in s\}$

$r\subseteq H_r$, $\quad s\subseteq H_s$, $\quad H_r \parallel H_s$

$d(r,s) \geq d(H_r, H_s)$; $\quad R\in H_r$
$S\in H_s$

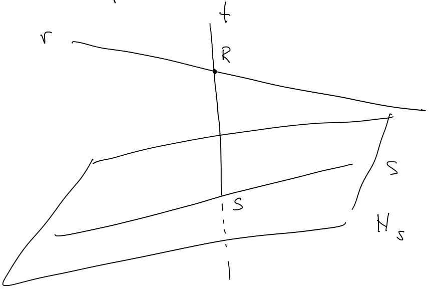
se dimostriamo che

$d(H_r,H_s) = d(R,S)$, abbiamo che

$d(r,s)\geq d(R,S)$, $\quad R\in r$, $\ S\in s$

$\Rightarrow d(r,s) = d(R,S)$

Quindi: $R\in r\subseteq H_r$
$S = H_r \cap t$

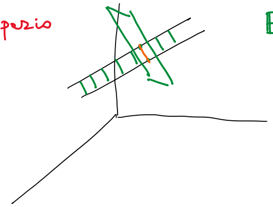


e osservo che $t = T_R(W_{H_s}^{\perp})$

quindi: S è la PROIEZ. ORT. del punto R su H_s

$\Rightarrow d(R,S) = d(R,H_s) = d(H_r,H_s)$
perché $H_r \parallel H_s$.

OSS.: Con un po' di considerazioni opportune, possiamo determinare la distanza tra 2 rette parallele nello spazio



E^3_R

Se $r, s \subseteq E^3_R$, $r \parallel s$

possiamo cons. un piano affine H arbitrario ma ORTOGONALE sia r che s

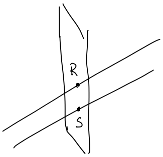
Più precisamente: se v_r è vett. direz. per r (e per s)

$$\dim \big(\underbrace{\mathrm{Span}(v_r)}_{\text{retta vett.}}\big)^\perp = 3-1 = 2$$

H qualunque con giacitura $(\mathrm{Span}(v_r))^\perp$

$H \cap r = \{R\}$

$H \cap s = \{S\}$



per costruzione, S è la proiez. ort. di R

$d(r, s) = d(R, s)$

Esempio: E^3_R $(= \mathbb{R}^3)$ con PS standard

$r \parallel s$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 1\cdot t \\ y = 2 + 1\cdot t \\ z = 3 + 1\cdot t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 1\cdot \tau \\ y = 3 + 1\cdot \tau \\ z = 1 + 1\cdot \tau \end{cases}$$

$v_r = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = v_s$

$$\begin{cases}1+t = 4+z\\2+t = 3+z\\3+t = 1+z\end{cases} \quad \begin{cases}t-z = 3\\t-z = 1\\t-z = -2\end{cases}$$

$H \perp r \quad , \quad H \perp s$

$$W_H = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)^{\perp} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

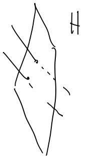
piano vettoriale

di eq.: $1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0$

$$\boxed{x+y+z=0}$$

Eq. cartesiana di H: $x+y+z = d$

ad esempio $d=1$: $x+y+z = 1$



$$r: \begin{cases}x = 1+t\\y = 2+t\\z = 3+t\end{cases}$$

$H \cap r : (1+t) + (2+t) + (3+t) = 1$

$3t = -5 \Rightarrow \bar{t} := -\frac{5}{3}$

il punto è $\begin{cases}x = 1 - \frac{5}{3}\\y = 2 - \frac{5}{3}\\z = 3 - \frac{5}{3}\end{cases}$ cioè $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = R$

$$s: \begin{cases}x = 4+z\\y = 3+z\\z = 1+z\end{cases}$$

$, \; s \cap H : (4+z) + (3+z) + (1+z) = 1$

$3z = -7$

$z = -\frac{7}{3}$

$S = s \cap H \quad , \quad S = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

$$(d(R,S))^2 = \|\overrightarrow{RS}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 7/3 \\ 1/3 \\ -8/3 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{9}(49+1+64)$$

$$d(R,S) = d(r,s) = \frac{1}{3}\sqrt{114}$$

PRODOTTO VETTORIALE
(o ESTERNO) in $\mathbb{R}^3$

Def.: Dati $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

definiamo il vettore

$$v \wedge w := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

PROP.:

L'operazione $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

ha le proprietà:

① BILINEARITÀ

$$(\lambda v_1 + \mu v_2) \wedge w = \lambda\, v_1 \wedge w + \mu\, v_2 \wedge w$$

$$v \wedge (\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda\, v \wedge w_1 + \mu\, v \wedge w_2$$

② ANTISIMMETRIA $\quad v \wedge w = -\,w \wedge v$

③ $v \wedge w = 0_{\mathbb{R}^3} \iff v$ e w sono

LINEARMENTE
DIPENDENTI

infatti: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ (eventualmente uno o entrambi nulli)

④ $$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$= \underbrace{a_1 \cdot \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \left(-\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}\right) + a_3 \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}$$

$$= v \bullet (v \wedge w) = 0 \implies v \perp v \wedge w$$

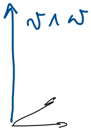
$$\det\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies w \bullet (v \wedge w) = 0 \implies w \perp v \wedge w$$

In particolare, se v e w sono LIN. INDIP.,

$\mathrm{Span}(v, w) \perp v \wedge w$

piano vettoriale



⑤ $\forall$ terna $v, w, u \in \mathbb{R}^3$

$$(v \wedge w) \bullet u = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

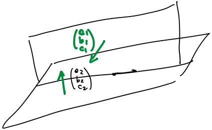
prodotto misto

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Applicazione: $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$, $H_1 \not\parallel H_2$

con eq. cartesiane $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$

voglio direzione retta $H_1 \cap H_2 = r$


$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$v_r = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$