Lezione 1 aprile 2026

mercoledì 1 aprile 2026 11:25

Spazi euclidei

Le trasformazioni naturali sono le affinità che conservano le distanze, ovvero le ISOMETRIE.

Def: Dato E su $\mathbb{R}$, $f: E \to E$ si dice ISOMETRIA se la parte lineare f è un ISOM. LINEARE, cioè

$$f: V \to V \quad ; \quad g \text{ PS su } V$$

$$g: V \times V \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{g(f(v), f(w)) = g(v, w), \quad \forall\, v, w \in V}$$

f ORTOGONALE risp. a g.

Richiami sulle isometrie lineari (endomorfismi ortogonali)

PROP.: V sv euclideo, g PS.
Sia $f: V \to V$ endomorfismo. Sono equivalenti:

① f è isometria

② Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di V
$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, allora
$\mathcal{B}' = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è base ortonormale

③ $\forall v \in V$, $\|f(v)\| = \|v\|$

Dim. ① ⇒ ③

$$\|f(v)\|^2 = g(f(v), f(v)) = g(v, v) = \|v\|^2$$

① ⇒ ② : f isometria: $g(f(v), f(w)) = g(v, w)$

$$\|f(v)\| = \|v\|$$

⇒ f conserva angoli

$$\cos \widehat{vw} = \cos\theta = \frac{g(v, w)}{\|v\| \; \|w\|} = \frac{g(f(v), g\, f(w))}{\|f(v)\| \cdot \|f(w)\|} = \cos \widehat{f(v) f(w)}$$

⇒ in particolare, se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonorm.

⇒ $\|v_i\| = 1 = \|f(v_i)\|$
e l'ortogonalità tra vettori è mantenuta

② ⇒ ③ Si usa il fatto che la matrice

che rappresenta un PS in una base ortonormale

è sempre $\mathbb{I}_n$:

$\mathcal{B}$ base ortonormale , $M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \overset{=1}{\overline{g(v_1,v_1)}} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & g(v_i,v_j) & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

se $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$g(v,v) = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \cdot \mathbb{I}_n \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2$$

$$f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n)$$

③ $\Rightarrow$ ① Supp. $\forall v \in V$, $\|f(v)\| = \|v\|$

Ricordo la formula di polarizzazione:

$$g(v+w, v+w) = \|v+w\|^2$$

$$= g(v,v) + 2g(v,w) + g(w,w) = \|v\|^2 + 2g(v,w) + \|w\|^2$$

$$\Rightarrow g(v,w) = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|f(v+w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|\underbrace{f(v)}+\underbrace{f(w)}\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2\right)$$

$$= g(f(v), f(w))$$

Teorema: V SV euclideo , g PS , $f: V \to V$ endomorfismo.

Allora f è isometria $\iff$ in una base ortonormale $\mathcal{B}$ la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ verifica ${}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathbb{I}_n$

OSS. : $f: V \to V$ isometria è automorfismo (isomorfismo)

$\ker f = \{ v : f(v) = 0_V \}$

$\Rightarrow \quad \|f(v)\| = \|0_V\| = 0$

$\parallel$

$\|v\| = 0$

$\Rightarrow \quad v = 0_V \quad \Rightarrow \quad \ker f = \{0_V\}$

COR. del Teorema: ${}^tM^B_B(f) = \left(M^B_B(f)\right)^{-1}$

B ortonormale

Def.: Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, A si dice MATRICE ORTOGONALE se A è invertibile e $A^{-1} = {}^tA$.

OSS.: $\{A : A^{-1} = {}^tA\} = O(n, \mathbb{R})$

è un gruppo rispetto $\cdot_{RC}$

è sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$

OSS.: Se $A \in O(n, \mathbb{R})$

${}^tA \cdot A = I_n$

$\det({}^tA \cdot A) = \det I_n = 1$

$\parallel$

Teo. Binet: $\det {}^tA \cdot \det A = 1$

$= (\det A)^2 = 1$

$\Rightarrow \quad \det A = \pm 1$

Def.: $SO(n, \mathbb{R}) := \{A \in O(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$

Prop.: $A \in M_n(\mathbb{R})$; allora

$A \in O(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow$ le sue colonne costituiscono una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^n$ rispetto al PS standard.

CARATTERIZZAZIONE degli elementi di

$O(2,\mathbb{R})$

$$A \in O(2,\mathbb{R}) \iff {}^tA \cdot A = \mathbb{I}_2$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ ab+cd=0 \\ b^2+d^2=1 \end{cases}$$

cioè $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

sono versori e $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ è un versore $\Rightarrow \exists\ \Phi$ angolo

t.c. $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi \\ \sin\Phi \end{pmatrix}$

analog. $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$

infine: $\boxed{ab+cd=0}$

$$\cos\Phi \cos\psi + \sin\Phi \sin\psi = 0$$

$$= \cos(\Phi - \psi) = 0$$

$$\iff \Phi - \psi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi = \Phi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ \cos\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right) = \overbrace{\cos\Phi \cos\frac{\pi}{2}}^{=0} + \sin\Phi \overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1} = \sin\Phi$$

opp. $\psi = \Phi - \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \cos\psi \\ \sin\Phi & \sin\psi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi \\ \sin\Phi & -\cos\Phi \end{pmatrix}$$

MATRICE DI RIFLESSIONE O SIMMETRIA S_Φ

$$\begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix}$$

MATRICE DI R_Φ

$$\sin\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\Phi \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \cos\Phi$$

$$= -\cos\Phi$$

$$\cos\left(\Phi - \frac{3}{2}\pi\right) = \cos\Phi \underbrace{\cos\frac{3}{2}\pi}_{=0} + \sin\Phi \underbrace{\sin\frac{3}{2}\pi}_{=-1}$$

$$= -\sin\Phi$$

$$\sin\left(\Phi - \frac{3}{2}\pi\right) = \sin\Phi \underbrace{\cos\frac{3}{2}\pi}_{=0} - \underbrace{\sin\frac{3}{2}\pi}_{=-1} \cos\Phi = \cos\Phi$$

OSS.: $R_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix}$

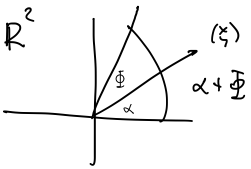
è $L_{R_\Phi} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$L_{R_\Phi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\Phi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

è la rotazione di angolo Φ in verso antiorario; infatti:

Scrivo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in forma polare

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}, \quad r = \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|$$



$$\begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos\Phi\cos\alpha - \sin\Phi\sin\alpha) \\ r(\sin\Phi\cos\alpha + \cos\Phi\sin\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\Phi) \\ r\sin(\alpha+\Phi) \end{pmatrix}$$