Lezione 2 aprile 2026

giovedì 2 aprile 2026 11:18

Ieri: $O(2,\mathbb{R})$ le matrici sono di 2 tipi:

$$R_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix}$$: rotazione antioraria di angolo Φ
$\det R_\Phi = 1$

$$S_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi \\ \sin\Phi & -\cos\Phi \end{pmatrix}$$

$$\det S_\Phi = -\cos^2\Phi - \sin^2\Phi = -1$$

Per capire il significato geometrico di S_Φ,

studiamo autovalori e autovettori.

Consideriamo prima le matrici di rotazione R_Φ.

Siccome le rette vettoriali sono ruotate di un angolo Φ, in generale mi aspetto che non ci siano autospazi reali.

Infatti:

$$p_{R_\Phi}(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\Phi - x & -\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Phi - x \end{pmatrix}$$

$$= (\cos\Phi - x)^2 + \sin^2\Phi$$

$$= x^2 - 2\cos\Phi\, x + 1$$

radici reali $\Longleftrightarrow$ $\Delta \geq 0$

$$\Delta = 4\cos^2\Phi - 4$$

$$\Delta \geq 0 \Longleftrightarrow \cos^2\Phi \geq 1$$

$$\Longleftrightarrow \cos^2\Phi = 1$$

$$\Longleftrightarrow \cos\Phi = \pm 1$$

$$\Longleftrightarrow \Phi = \begin{cases} 0 + 2k\pi \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \pi + 2k\pi \end{cases}$$

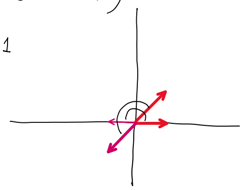
inoltre: in questi casi, $\Delta = 0$, c'è 1! radice reale doppia

$$\Phi = 0 + 2k\pi : \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$\Phi = \pi + 2k\pi \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$



Vediamo ora le matrici S_Φ.

$$P_{S_\Phi}(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\Phi - x & \sin\Phi \\ \sin\Phi & -\cos\Phi - x \end{pmatrix}$$

$$= -(\cos\Phi - x)(\cos\Phi + x) - \sin^2\Phi$$

$$= -(\cos^2\Phi - x^2) - \sin^2\Phi$$

$$= x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$\Rightarrow$ ci sono sempre 2 radici, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$

Inoltre: S_Φ è simmetrica $\forall\ \Phi$, quindi per Teo Spettrale matrici simmetriche, $\exists$ base ortonormale $B = \{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori

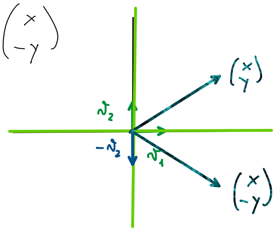
$$S_\Phi, \quad L_{S_\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$M_B^B(L_{S_\Phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$, S_Φ è simile a questa

$L_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$L_D\left(\cancel{v_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
v_2
$-v_2$
v_1
$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

è la RIFLESSIONE

o SIMMETRIA rispetto a $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

In generale S_Φ ammette 2 autospazi, ortogonali tra loro, $V_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 : S_\Phi \cdot v = v\}$

$$V_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^2 : S_\Phi \cdot v = (-1)\, v = -v$$

PROP.: Per le matrici di $O(2)$, si ha:

① R_Φ ha autovalori reali $\Longleftrightarrow$ $\Phi = 0 + 2k\pi$
$= \pi + 2k\pi$

e $R_\Phi = \pm\, \mathbb{I}_2$

② S_Φ ha sempre 2 autovalori reali distinti

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$

inoltre $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_{-1}$, e $V_1 \perp V_{-1}$

OSS.: Siano $\theta, \Phi \in \mathbb{R}$; allora:

① $R_\theta \cdot R_\Phi = R_{\theta+\Phi} \in SO(2)$

$= R_\Phi \cdot R_\theta$

$\Rightarrow$ SO(2) è ABELIANO

⚠ $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$

se $n \geq 3$, $SO(n)$ NON è ABELIANO

② $S_\theta \cdot S_\Phi = R_{\theta-\Phi} \in SO(2)$

③ $R_\theta \cdot S_\Phi = S_{\Phi+\theta} \notin SO(2)$

$\neq$

④ $S_\Phi \cdot R_\theta = S_{\Phi-\theta}$

⑤ $S_{2\theta} = R_\theta \cdot S_0 \cdot R_{-\theta}$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vediamo ora che le matrici di simmetria S_Φ rappresentano delle simmetrie.

Def.: Cons. $\mathbb{R}^n$ (o V sv reale di dim $= n$ euclideo)

$H \subseteq \mathbb{R}^n$ ssv, $\dim H = k \leq n-1$

cons. PS standard

$$H \oplus H^\perp = \mathbb{R}^n$$

Si dice SIMM. RISP. ad H l'app. lineare

$$sy_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

se $\boxed{v = v_H + v_{H^\perp}}$ l'unica decomp. di v con $v_H \in H$, $v_{H^\perp} \in H^\perp$

pongo: $\boxed{sy_H(v) := v_H - v_{H^\perp}}$

Esempio: $\mathbb{R}^2$, $H = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

$v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\qquad H^\perp = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}}_{\in H} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}}_{\in H^\perp}$$

$$sy_H(v) = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

PROP.: Le app. sy_H sono ISOMETRIE di $\mathbb{R}^n$, e sono sempre diagonalizzabili.

Dim: $H \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim H = k$

Fisso base ortonormale $\{v_1, \dots, v_k\}$ di H e la completo a base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (con l'algoritmo di Gram-Schmidt):

$$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\} = \mathcal{B}$$

e sappiamo che $\{v_{k+1}, \dots, v_n\} = \mathcal{B}'$ è base ortonormale di $H^\perp$

I_k

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(sy_H) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & O & & \\ 0 & 1 & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & & & & \\ \hline \vdots & \vdots & & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & & 0 & -1 & & \\ & & & & \vdots & & \ddots & -1 \\ & & & & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right) = M \; ; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$-I_{n-k}$

$$= M = {}^tM$$

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i$$

$$sy_H(v) = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i - \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i$$

in particolare: $sy_H(v_1) = v_1, \dots, sy_H(v_k) = v_k$

$$sy_H(v_{k+1}) = sy_H(0_V + v_{k+1}) = 0_V - v_{k+1} = -v_{k-1}$$

$$\vdots$$

$$sy_H(v_n) = -v_n$$

$$\Rightarrow M \in O(n), \quad \det M = (-1)^{n-k}$$

(siccome M è diagonale in $\mathcal{B}$ ortonormale, M è anche simmetrica $\Rightarrow$ sy_H è anche endomorfismo AUTOAGGIUNTO); H si dice SSV ASSE delle simmetrie

Torniamo alle matrici S_Φ e consideriamo l'applicazione lineare L_{S_Φ} ad esse associate.

$$\boxed{\text{Prop.: } L_{S_\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ è una SIMMETRIA RISP. } H = V_1 .}$$

Dim.: $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_{-1} = V_1 \oplus (V_1)^\perp$

$v = v_{V_1} + v_{V_{-1}}$, $S_\Phi \cdot v = S_\Phi \cdot (v_{V_1} + v_{V_{-1}})$

$$= S_\Phi \cdot \underbrace{v_{V_1}} + S_\Phi \cdot v_{V_{-1}}$$

$$= v_{V_1} + (-1) \cdot v_{V_{-1}} = v_{V_1} - v_{V_{-1}}$$

$$= v_{V_1} - v_{V_1^\perp}$$

$$= sy_{V_1}(v)$$

OSS.: Asse di simmetria di S_Φ è l'autospazio V_1: $V_1 = \ker(S_\Phi - 1 \cdot I_2)$

eq. cart. $\begin{pmatrix} \cos\Phi - 1 & \sin\Phi \\ \sin\Phi & -\cos\Phi - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{(\cos\Phi - 1)\, x + \sin\Phi\, y = 0} \quad V_1$$

esercizio: trovare fattore di proporzionalità tra le 2 righe

angolo tra V_1 e asse x

α

vett. direz. di V_1: $\begin{pmatrix} \sin\Phi \\ 1 - \cos\Phi \end{pmatrix}$, asse $x = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\Phi \neq 0 + 2k\pi$

$$\cos\alpha = \frac{\left| \left\langle \begin{pmatrix} \sin\Phi \\ 1 - \cos\Phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right|}{\left\| \begin{pmatrix} \sin\Phi \\ 1 - \cos\Phi \end{pmatrix} \right\| \cdot 1}$$

$$= \frac{|\sin \Phi|}{\sqrt{2(1-\cos\Phi)}}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \sin\Phi \\ 1-\cos\Phi \end{pmatrix} \right\|^2 = \sin^2\Phi + 1 - 2\cos\Phi + \cos^2\Phi$$

$$= 2 - 2\cos\Phi \qquad = 2(1-\cos\Phi)$$

Trucco:

$\sin\Phi = \sin 2 \cdot \frac{\Phi}{2} = 2 \sin \Phi/_2 \ \cos \Phi/_2$

$\cos\Phi = \cos 2\,\Phi/_2 = \cos^2 \Phi/2 - \sin^2 \Phi/2$

$1-\cos\Phi = 1 - \cos^2 \Phi/2 + \sin^2 \Phi/2 = 2\sin^2 \Phi/2$

$\sqrt{2(1-\cos\Phi)} = \sqrt{4\sin^2 \Phi/_2} = 2\,|\sin \Phi/2|$

$$\Longrightarrow \cos\alpha = \frac{2\,|\sin \Phi/_2| \cdot |\cos \Phi/2|}{2\,|\sin \Phi/_2|} = |\cos \Phi/2|$$

$\Longrightarrow$ se $\Phi/2$ è acuto $\left(\Longleftrightarrow 0 < \Phi/_2 \leq \pi/2 \right.$

$\left. \Longleftrightarrow 0 < \Phi \leq \pi \right)$

allora $\alpha = \frac{\Phi}{2}$; se $\frac{\pi}{2} < \frac{\Phi}{2} < \pi$,

allora $\alpha = \pi - \frac{\Phi}{2}$.

Vediamo ora una FORMA NORMALE per ISOMETRIE, che ci permette di descrivere le isometrie in un qualunque spazio euclideo V di $\dim V = n$.

TEOREMA :

Sia V sv euclideo su $\mathbb{R}$, $\dim V = n$.
Sia $f : V \to V$ isometria lineare.
Allora $\exists$ base ortonormale $\mathcal{B}$ di V t.c.

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Idea di dim: prossimamente.