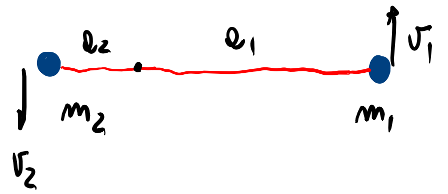
ROTORE RIGIDO

Si consideri il sistema costituito da due particelle di masse m_1 e m_2, unite da un asta rigida di lunghezza a



Se messo in rotazione, il moto avverrà attorno al centro di massa (baricentro), situato in un punto dell'asta definito dalle distanze a_1 e a_2:

$$\begin{cases} a_2 + a_1 = a \\ m_1 a_1 = m_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow \quad a_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\, a \qquad a_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\, a$$

L'energia del sistema in moto circolare uniforme sarà data dalla somma dell'energia cinetica delle particelle:

$$H = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\omega^2 (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) = \frac{1}{2} I \omega^2$$

con $I = m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2$ momento di inerzia

Possiamo esprimere I in funzione della massa ridotta $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$:

$$I = m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 = \frac{m_1 m_2^2 a^2 + m_2 m_1^2 a^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{m_1 m_2 \cancel{(m_2+m_1)}\, a^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} = \mu a^2$$

Il momento angolare $\vec{L} = \sum_{i=1}^{2} m_i\, \vec{a}_i \times \vec{v}_i$ diventa, in modulo,

$$L = m_1 v_1 a_1 + m_2 v_2 a_2 = \omega (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) = I \omega$$

$$H = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{I^2 \omega^2}{I} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu a^2}$$

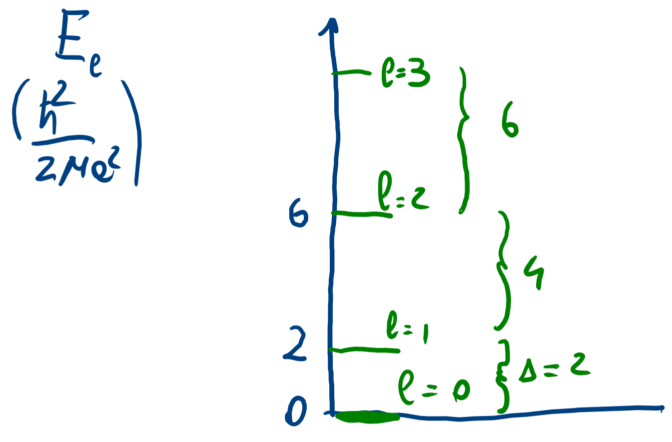
Se il rotore è quantistico dovremo risolvere l'equazione agli autovalori:

$$H\psi = E\psi$$

$$\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu e^2}\psi = E\psi \quad \Rightarrow \quad \text{gli autovalori saranno} \quad \frac{1}{2}\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{\mu e^2}$$

gli autovettori saranno le armoniche sferiche Y_ℓ^m

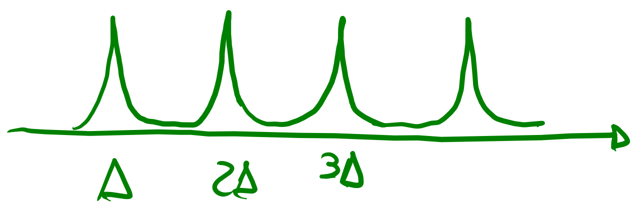
Il rotore rigido è un ottimo modello per rappresentare una molecola in rotazione. Gli autovalori di H sono lo spettro rotazionale



Per ragioni di simmetria, in seguito all'interazione con radiazione e.m., posso avere salti di $\Delta \ell = \pm 1$

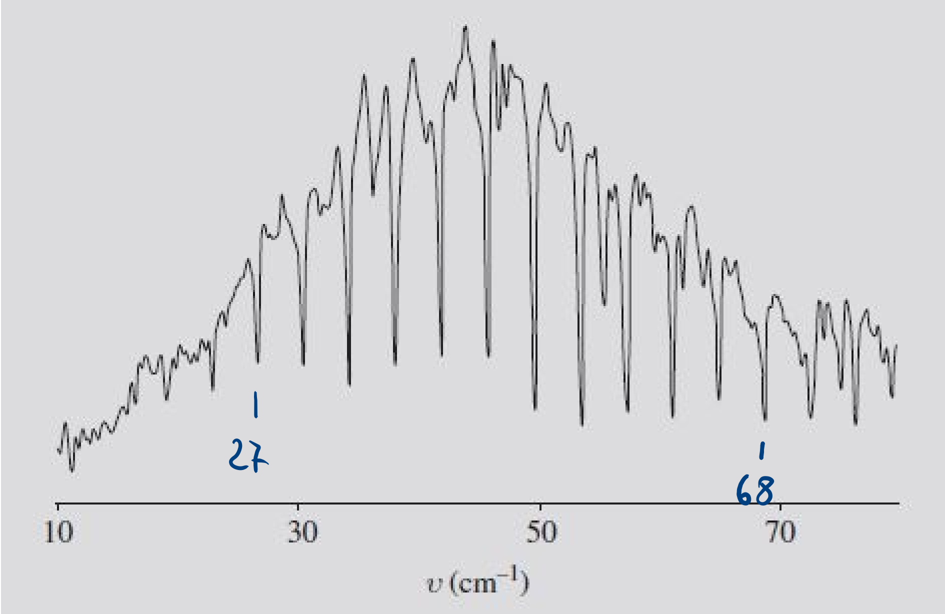
Vedrò energie pari ai salti dei livelli adiacenti

Lo spettro di assorbimento rotazionale sarà fatto quindi di picchi a $\Delta, 2\Delta, 3\Delta$ ...... con $\Delta = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} = \frac{\hbar^2}{I}$



Le energie in gioco sono nel range delle microonde.

Esempio



Lo spettro rotazionale della molecola di $\boxed{CO}$ mostra transizioni

con $\Delta\nu \approx \frac{68-27}{11}\ cm^{-1} = 3.73\ cm^{-1}$

Convertiamo in s^{-1} : $\lambda = \frac{1}{3.73}\ cm \Rightarrow$ Essendo $\frac{\lambda}{c} = T = \frac{1}{\nu(s^{-1})}$

$$\Rightarrow \Delta\nu(s^{-1}) = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\cdot 10^{10}\ cm/s}{(3.73)^{-1}\ cm} = 11.2\cdot 10^{10}\ s^{-1}$$

$\boxed{\Delta = h\Delta\nu}$

La massa ridotta di CO :

$$m_C = 12\cdot u = 12\cdot 1.66054\cdot 10^{-27}\ Kg = 2\cdot 10^{-26}\ Kg$$

$$m_O = 16\cdot u = \frac{4}{3}\ m_C$$

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2} = \frac{\frac{4}{3}m_C^2}{\frac{7}{3}m_C} = \frac{4}{7}m_C = 1.14\cdot 10^{-26}\ Kg$$

Il momento di inerzia, dalle relazioni trovate:

$$I = \frac{\hbar^2}{\Delta} = \frac{\hbar^2}{h\Delta\nu} = \frac{\hbar}{2\pi\Delta\nu} = \mu a^2$$

Sostituendo i valori noti trovo una stima per $a_{CO} = 1.15\cdot 10^{-10}\ m$ (il valore "accettato" è $1.128\cdot 10^{-10}$)