Geometria 3 - Curve e superfici 2025/2026
Foglio di esercizi 5

Prof. Valentina Beorchia

7 aprile 2026

1. Si definisca una curva regolare $C \subset \mathbb{R}^n$ in analogia con una superficie regolare. Si provi che:

   (a) La preimmagine $C := f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^2$ di un valore regolare c per una funzione differenziabile $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una curva regolare in $\mathbb{R}^2$.

   Si dia un esempio di una tale curva non connessa.

   (b) La preimmagine $C := f^{-1}(c)$ di un valore regolare c per una funzione differenziabile $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è una curva regolare $C \subset \mathbb{R}^3$.

2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare esia $p \in S$. Si dimostri che se $H \ni p = \varphi(u_0, v_0)$ è un qualunque piano affine con giacitura contenente il versore normale

$$N(u_0, v_0) = \frac{\partial_u \varphi(u_0, v_0) \wedge \partial_v \varphi(u_0, v_0)}{\|\partial_u \varphi(u_0, v_0) \wedge \partial_v \varphi(u_0, v_0)\|},$$

   cioè un piano *normale* alla superficie in p, allora H è diverso dal piano tangente a S in un opportuno intorno di p in $H \cap S$, e che in particolare la curva $H \cap S$ è regolare in un intorno di $p \in S$.

3. Si verifichi che la definizione di applicazione differenziabile tra superfici regolari non dipende dalla scelta delle parametrizzazioni locali.

4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$.

(a) Sia $\nabla_S F(p)$ la proiezione ortogonale del vettore gradiente $\nabla F(p)$ sul piano tangente vettoriale T_pS.
Si dimostri che se $\alpha : I \to S$ è una curva tale che $\alpha(I) \subset S$ e $\alpha(t_0) = p$, allora vale

$$(\nabla_S F(p)) \cdot \alpha'(t_0) = \frac{d}{dt}_{|t=t_0} F(\alpha(t)).$$

Se ne deduca che se la restrizione $F_{|S}$ ad S ha un minimo locale o un massino locale in p, allora $\nabla_S F(p) = (0, 0, 0)$.

(b) Supponiamo che S ammetta un'equazione implicita $g(x, y, z) = 0$. Si dimostri che se la restrizione $F_{|S}$ ad S ha un minimo locale o un massino locale in $p \in S$, allora

$$\nabla F(p) = \lambda \nabla g(p)$$

per un opportuno scalare λ (detto *moltiplicatore di Lagrange*).

5. Si dimostri che per ogni coppia di vettori $v, w \in \mathbb{R}^3$ vale l'identità

$$\|v \wedge w\|^2 + (v \cdot w)^2 = \|v\|^2 \, \|w\|^2.$$

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard, supponiamo che i suoi due autovalori $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ siano distinti, e sia $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormale di autovettori associati ai due autovalori.

(a) Si dimostri che se $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, per ogni $v \in \mathbb{S}^1$ si ha

$$|\lambda_1| \leq \|f(v)\| \leq |\lambda_2|,$$

e vale $\|f(v)\| = |\lambda_i|$ se e solo se $v = \pm v_i$.
Suggerimento: si scriva il generico $v \in \mathbb{S}^1$ nella forma $v = \cos\alpha \, v_1 + \sin\alpha \, v_2$.

(b) Si consideri la forma quadratica associata a f:

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; Q(v) = f(v) \cdot v,$$

e supponiamo che $\lambda_1 < \lambda_2$.
Si dimostri che per ogni $v \in \mathbb{S}^1$ si ha

$$\lambda_1 \leq Q(v) \leq \lambda_2,$$

e vale $Q(v) = \lambda_i$ se e solo se $v = \pm v_i$.