

Capitolo 4

Il prodotto vettoriale

In questa sezione consideriamo \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione 4.0.1. Siano

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

due vettori di \mathbb{R}^3 . Il prodotto vettoriale di v e w è il vettore $v \wedge w \in \mathbb{R}^3$ definito come segue:

$$v \wedge w := \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ -a_1 c_2 + a_2 c_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Un'altra notazione usata frequentemente per il prodotto vettoriale di v e w è $v \times w$.

Osservazione 4.0.2. Osserviamo che le coordinate di $v \wedge w$ rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ sono i determinanti dei minori 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & a_2 \end{pmatrix}, \tag{4.0.1}$$

e precisamente,

$$v \wedge w = e_1 \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Si noti che il lato destro di (4.0.1) coincide con lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna del “determinante della matrice”

$$\begin{pmatrix} e_1 & a_1 & a_2 \\ e_2 & b_1 & b_2 \\ e_3 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Dalla osservazione appena vista, deduciamo la seguente.

Proposizione 4.0.3. *Siano $u, v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti affermazioni.*

1. $(v_1 + v_2) \wedge w = v_1 \wedge w + v_2 \wedge w$; $(cv) \wedge w = c(v \wedge w)$.
2. $v \wedge (w_1 + w_2) = v \wedge w_1 + v \wedge w_2$; $v \wedge (cw) = c(v \wedge w)$.
3. $v \wedge w = -w \wedge v$.
4. $\langle u, v \wedge w \rangle = \det \begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, dove $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$.
5. $v \wedge w \perp v, w$.
6. $v \wedge w = 0 \iff v, w$ sono linearmente dipendenti.
7. $\|v \wedge w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin \theta$, dove θ è l'angolo convesso tra v e w . Inoltre $\|v \wedge w\|$ coincide con l'area del parallelogramma di vertici $0, v, w$ e $v + w$.

Dimostrazione. I punti 1, 2 e 3 seguono direttamente dalle proprietà del determinante.

4. Dall'equazione (4.0.1) abbiamo:

$$\langle v, v \wedge w \rangle = a \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} - b \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

che coincide con lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna del determinante di

$$\begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

5. Dalla proprietà 4. segue che $\langle v, v \wedge w \rangle = \det(v, v, w) = 0$, poiché la matrice (v, v, w) ha due colonne uguali. Quindi $v \perp v \wedge w$. Analogamente si dimostra che $w \perp v \wedge w$.

6. Si ha

$$v \wedge w = 0 \iff \text{rk} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} < 2, \text{rk} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} < 2, \text{rk} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} < 2.$$

Equivalentemente, $v \wedge w = 0 \iff v, w$ sono linearmente dipendenti.

7. Questa proprietà è conseguenza immediata delle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}\|v \wedge w\|^2 &= (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot (\cos \theta)^2 \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 (1 - (\cos \theta)^2) \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot (\sin \theta)^2.\end{aligned}$$

□

Capitolo 5

Geometria euclidea

5.1 Spazi vettoriali euclidei e unitari

Riprendiamo alcune nozioni di Algebra Lineare sugli spazi vettoriali euclidei. Dovremo distinguere i due casi: quello reale e quello complesso.

Definizione 5.1.1. Sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale. Una *forma bilineare simmetrica su V* è una applicazione

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

che verifica le seguenti proprietà:

i) bilinearità, cioè

- $\forall v \in V$, l'applicazione $g(v, -) : V \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare;
- $\forall w \in V$, l'applicazione $g(-, w) : V \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare;

ii) simmetria, cioè $\forall v, w \in V$, vale $g(v, w) = g(w, v)$.

Infine, tale forma bilineare si dice *definita positiva* o *prodotto scalare reale* se $\forall v \in V$, si ha $g(v, v) \geq 0$ e inoltre $g(v, v) = 0$ se e solo se $v = 0_V$.

In questo caso, diciamo che V è uno *spazio vettoriale reale euclideo* o un \mathbb{R} - *spazio vettoriale euclideo*.

In modo analogo, ma con i dovuti adattamenti, vediamo la corrispondente nozione relativa ai numeri complessi.

Utilizzeremo le seguenti notazioni: se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, denotiamo il suo coniugato $a - ib$ con \bar{z} e il suo modulo $\sqrt{a^2 + b^2}$ con $|z|$. Chiaramente, se $z \in \mathbb{R}$, il suo modulo coincide col valore assoluto.

Definizione 5.1.2. Sia V un \mathbb{C} -spazio vettoriale. Una *forma sesquilineare hermitiana* su V è una applicazione

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

che verifica le seguenti proprietà:

i) *sequilinearità*, cioè

– $\forall v \in V$, l'applicazione $g(v, -) : V \rightarrow \mathbb{C}$ è additiva e verifica

$$g(v, \lambda w) = \bar{\lambda}g(v, w),$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $w \in V$;

– $\forall w \in V$, l'applicazione $g(-, w) : V \rightarrow \mathbb{C}$ è lineare;

ii) *simmetria coniugata*, cioè $\forall v, w \in V$, vale $g(v, w) = \overline{g(w, v)}$.

Infine, tale forma si dice *definita positiva* o *prodotto hermitiano complesso* se $\forall v \in V$, si ha $g(v, v) \geq 0$ e inoltre $g(v, v) = 0$ se e solo se $v = 0_V$.

In questo caso, diciamo che V è uno *spazio vettoriale complessounitario*.

Si osservi che la richiesta $g(v, v) \geq 0$ ha senso in quanto, per la simmetria coniugata, $g(v, v) = \overline{g(v, v)}$, dunque $g(v, v) \in \mathbb{R}$.

Osservazione 5.1.3. Ricordiamo inoltre che, come accade per le applicazioni lineari, anche alle forme bilineari si può associare una matrice, una volta che si è fissata una base per lo spazio vettoriale. Infatti, se V è un \mathbb{R} -spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una sua base, a ogni forma bilineare

$$\tau : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

si associa la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(\tau)_{i,j} := (\tau(v_i, v_j)) \in M_n(\mathbb{R}).$$

Viceversa, a una matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ si associa, rispetto a \mathcal{B} , la forma bilineare definita, su una qualunque coppia di vettori $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ e $w = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$, da:

$$\tau(v, w) := \sum_{i,j=1}^n m_{ij}a_ib_j.$$

Associando ad ogni vettore v la matrice colonna $a := {}^t(a_1, \dots, a_n)$ delle sue coordinate rispetto alla base scelta, e analogamente a w la matrice colonna $b := {}^t(b_1, \dots, b_n)$, l'uguaglianza precedente si scrive sinteticamente come

$$\tau(v, w) = {}^t a M b.$$

È noto, inoltre, che τ è una forma bilineare simmetrica se e solo se $M = M_{\mathcal{B}}(\tau)$ è una matrice simmetrica (cioè tale che ${}^tM = M$).

In particolare, se V è uno spazio vettoriale reale euclideo, si associa al prodotto scalare, rispetto a una base fissata \mathcal{B} , una matrice M simmetrica reale definita positiva che verifica

$$\langle v, w \rangle = {}^t_a M b.$$

e viceversa.

Definizione 5.1.4. Se $V = \mathbb{R}^n$, il *prodotto scalare standard* è quello associato alla matrice identica rispetto alla base canonica.

Pertanto, se $v = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ e $w = {}^t(b_1, \dots, b_n)$, allora

$$\langle v, w \rangle = {}^t v \mathbb{I}_n w = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

In modo analogo si prova la corrispondenza tra un prodotto hermitiano complesso in un \mathbb{C} -spazio vettoriale euclideo e una matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ hermitiana (cioè tale che ${}^tM = \overline{M}$) definita positiva, data da

$$g(v, w) = {}^t v M \overline{w}.$$

Ricordiamo un risultato fondamentale, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 5.1.5. Se V è un \mathbb{R} -spazio vettoriale euclideo, comunque scelti $v, w \in V$, vale

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Definizione 5.1.6. Se V è un \mathbb{R} (rispettivamente, \mathbb{C})-spazio vettoriale euclideo, diciamo *norma* di $v \in V$ il numero reale non negativo

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Con tale nozione, possiamo riscrivere il risultato precedente nella sua formulazione più generale (che vale anche sui numeri complessi).

Teorema 5.1.7 (Diseguaglianza di Cauchy - Schwarz). Se V è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti $v, w \in V$, si ha

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Proposizione 5.1.8. Sia V un spazio vettoriale euclideo reale o complesso. Provare che, per ogni $v \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (rispettivamente, \mathbb{C}) valgono le seguenti proprietà:

a) $\|v\| \geq 0$ (qui 0 denota $0_{\mathbb{R}}$);

b) $\|v\| = 0 \iff v = 0_V$;

c) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

Dalla Disuguaglianza di Schwarz discende un'altra nota relazione.

Teorema 5.1.9 (Disuguaglianza triangolare). Se V è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti $v, w \in V$, si ha

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza allora v e w sono linearmente dipendenti.

In uno spazio vettoriale euclideo si può introdurre la nozione di ortogonalità fra vettori e, di conseguenza, anche fra sottospazi vettoriali.

Definizione 5.1.10. Diciamo che due vettori $v, w \in V$ sono *ortogonali* se $\langle v, w \rangle = 0$.

Osservazione 5.1.11. Si noti che in uno spazio vettoriale euclideo reale vale

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle.$$

Dunque, se v e w sono ortogonali si ha

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

cioè il Teorema di Pitagora, che dunque vale in un qualunque spazio vettoriale euclideo.

In uno spazio vettoriale euclideo si rivela essenziale la nozione di *base ortonormale*, cioè di una base costituita da vettori di norma 1 e a due a due ortogonali. Se $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ è una base ortonormale, allora per ogni $v \in V$ si ha

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Inoltre ogni cambiamento di base tra basi ortonormali è associato a una matrice ortogonale M (cioè tale che ${}^t M = M^{-1}$), nel caso reale. Mentre nel caso complesso M è unitaria (cioè tale che ${}^t \bar{M} = M^{-1}$).

Infine ricordiamo la seguente nozione

Definizione 5.1.12. Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V . Diciamo *complemento ortogonale di W* l'insieme

$$W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}.$$

Il nome di "complemento ortogonale" è giustificato dalle seguenti proprietà, le cui dimostrazioni sono già state viste nel corso di Algebra Lineare.

Proposizione 5.1.13. Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V . Allora valgono i seguenti fatti:

- i) W^\perp è un sottospazio vettoriale di V ;
- ii) $W^\perp \cap W = \{0_V\}$;
- iii) $W^\perp + W = V$.

In particolare, la somma $W^\perp + W$ è diretta e si denota dunque con $W^\perp \oplus W$. Conseguentemente, $\dim(W^\perp) + \dim(W) = \dim(V)$.

Osservazione 5.1.14. Se W_1 e W_2 sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale euclideo V , provare che

$$W_1 \subseteq W_2^\perp \iff W_2 \subseteq W_1^\perp.$$

Definizione 5.1.15. Due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 di uno spazio vettoriale euclideo V sono *ortogonali* se

$$W_1 \subseteq W_2^\perp, \quad \text{oppure} \quad W_2 \subseteq W_1^\perp.$$

Osservazione 5.1.16. Per la Proposizione 5.1.13, se W_1 e W_2 sono ortogonali si ha

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) \leq \dim(V).$$

Esempio 5.1.17. Sia W un iperpiano dello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^n con prodotto scalare standard. La sua equazione cartesiana è del tipo

$$W : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Ovviamente il vettore $(a_1, \dots, a_n) \in W^\perp$. D'altro canto, $\dim(W) = n - 1$ dunque $\dim(W^\perp) =$

1. Pertanto W^\perp è la retta vettoriale $\text{Span} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Concludiamo il paragrafo con una nozione relativa solo al caso reale.

Definizione 5.1.18. Siano v, w due vettori non nulli di un \mathbb{R} -spazio vettoriale euclideo V . Si dice *angolo convesso* tra v e w l'unico angolo θ , con $0 \leq \theta \leq \pi$ tale che

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Si noti che, per la Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz, tale frazione è compresa tra -1 e 1 . Si osservi infine che, se v e w sono proporzionali, cioè se $w = \lambda v$, allora

$$\cos \theta = \frac{\langle v, \lambda v \rangle}{\|v\| \|\lambda v\|} = \frac{\lambda \|v\|^2}{|\lambda| \|v\|^2} = \pm 1$$

dove $\cos \theta = 1 \iff \theta = 0 \iff \lambda > 0$, $\cos \theta = -1 \iff \theta = \pi \iff \lambda < 0$.

5.2 Spazi affini euclidei

Introduciamo ora un nuovo ambiente geometrico relativamente ai due casi, reale e complesso.

Definizione 5.2.1. Se V è uno spazio vettoriale reale (rispettivamente, complesso) euclideo, diciamo *spazio affine euclideo* (rispettivamente, *unitario*) lo spazio affine $\mathbb{A}(V)$ su V che verrà denotato con

$$\mathbb{E}.$$

I sottospazi affini di \mathbb{E} sono detti suoi *sottospazi euclidei* (rispettivamente, *unitari*).

In particolare, se $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard, il corrispondente *spazio affine euclideo canonico* si denota con

$$\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n.$$

Se $V = \mathbb{C}^n$, il corrispondente *spazio affine unitario canonico* si denota

$$\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^n.$$

Grazie al prodotto scalare su V , è possibile definire l'ortogonalità e gli angoli tra sottospazi euclidei (risp. unitari).

Definizione 5.2.2. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario) e $S, T \subseteq \mathbb{E}$ due suoi sottospazi euclidei (rispettivamente, unitari) di dimensione ≥ 1 .

Diciamo che S e T sono *ortogonali* se lo sono le rispettive giaciture come sottospazi di V e scriveremo

$$S \perp T.$$

Si osservi che, se S e T sono ortogonali in \mathbb{E} , con $n = \dim(\mathbb{E})$, allora

$$\dim(S) + \dim(T) \leq n. \quad (5.2.1)$$

Per poter fare calcoli, come nel caso affine, occorre introdurre un sistema di riferimento. Ma qui terremo conto che lo spazio vettoriale soggiacente è euclideo.

Definizione 5.2.3. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo sullo spazio vettoriale euclideo V . Si dice *riferimento cartesiano* in \mathbb{E} un riferimento affine (O, \mathcal{B}) , dove \mathcal{B} è una base ortonormale di V .

Esempio 5.2.4. Si consideri un iperpiano H di $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ che, rispetto a un fissato riferimento cartesiano, abbia equazione

$$H : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

La sua giacitura è $H_0 : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Per definizione, un sottospazio euclideo $S = Q + S_0$ è ortogonale a H se e solo se $\dim(S_0) \geq 1$ e $S_0 \subseteq H_0^\perp$.

Osserviamo che H_0^\perp è una retta vettoriale e precisamente $H_0^\perp = \text{Span}(v)$, dove $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Dunque S è necessariamente una retta affine di giacitura $S_0 = \text{Span}(v)$.

Ad esempio, il piano H e la retta r di \mathbb{E}^3 dati da

$$H : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \quad r : (x_1, x_2, x_3) = (1 + 2t, 2 - 3t, 43 + t)$$

sono ortogonali.

Esempio 5.2.5. Si considerino due rette r e s di $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ aventi come vettori direzionali (rispetto a un riferimento cartesiano)

$$v_r = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad v_s = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

rispettivamente. Per definizione, $r \perp s$ se e solo se $\text{Span}(v_r) \subset \text{Span}(v_s)^\perp$ e questo si verifica se e solo se $v_r \perp v_s$ cioè se e solo se

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 0.$$

Come visto in (5.2.1), se $S, T \subset \mathbb{E}^n$ sono ortogonali, allora necessariamente $\dim(S) + \dim(T) \leq n$. Volendo estendere tale nozione a sottospazi di dimensione qualunque, partiamo dalla seguente osservazione.

Siano $S \ni P$ e $T \ni Q$ due sottospazi euclidei di giaciture rispettive S_0 e T_0 e denotiamo le rispettive dimensioni con

$$s := \dim(S) = \dim_{\mathbb{R}}(S_0), \quad t := \dim(T) = \dim_{\mathbb{R}}(T_0).$$

Se accade che

$$\dim(S) + \dim(T) \geq n,$$

allora

$$\dim(S_0^\perp) + \dim(T_0^\perp) = (n - s) + (n - t) = 2n - (s + t) \leq n.$$

Questo induce a introdurre la seguente nozione.

Definizione 5.2.6. Siano $S \ni P$ e $T \ni Q$ due sottospazi euclidei di \mathbb{E}^n di giaciture rispettive S_0 e T_0 . Se $\dim(S) + \dim(T) \geq n$, diciamo che S e T sono *perpendicolari* se S_0^\perp e T_0^\perp sono ortogonali.

Esempio 5.2.7. Si considerino due piani di \mathbb{E}^3 di equazioni

$$S : ax + by + cz + d = 0, \quad T : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Per definizione, essi sono perpendicolari se e solo se le rette vettoriali

$$S_0^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad T_0^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

sono ortogonali. Tale condizione equivale a

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \text{cioè} \quad aa' + bb' + cc' = 0.$$

5.3 Angolo tra sottospazi euclidei

Per quanto riguarda l'angolo tra due sottospazi euclidei, ci limiteremo a due classi di esempi: l'angolo fra due rette e quello fra una retta e un iperpiano.

Tenendo presente la definizione di angolo acuto fra due vettori di un \mathbb{R} -spazio vettoriale euclideo, si noti che due rette individuano due angoli, uno acuto e uno ottuso. Sceglieremo quello acuto, per convenzione.

Definizione 5.3.1. Siano $r, s \subset \mathbb{E}^n$ due rette nello spazio affine euclideo di vettori direzionali rispettivi v_r e v_s .

Si dice *angolo fra le rette r e s* , e si denota con \widehat{rs} , l'unico angolo $\theta \in [0, \pi/2]$ tale che

$$\cos \theta = \frac{|\langle v_r, v_s \rangle|}{\|v_r\| \|v_s\|}.$$

Si osservi che, nella definizione precedente, $0 \leq \cos \theta \leq 1$ e dunque \widehat{rs} è un angolo acuto. Inoltre è chiaro che $r \perp s$ se e solo se $\widehat{rs} = \pi/2$.

Osservazione 5.3.2. Si noti che l'angolo fra due rette, come accadeva con l'ortogonalità, non ha nulla a che vedere con l'incidenza delle due rette: infatti lo si può definire e calcolare sia nel caso in cui le rette siano incidenti, sia nel caso in cui siano sghembe.

Definizione 5.3.3. Siano r una retta e H un iperpiano in \mathbb{E}^n ; sia inoltre t una retta ortogonale a H . Si dice *angolo fra r e H* , e si denota con \widehat{rH} , l'unico angolo α complementare dell'angolo \widehat{rt} .

In altre parole, posti v_r e n due vettori direzionali di r e t , rispettivamente,

$$\widehat{rH} := \pi/2 - \widehat{rt}$$

ove \widehat{rt} è l'unico angolo (tra 0 e $\pi/2$) tale che

$$\cos \widehat{rt} = \frac{|\langle v_r, n \rangle|}{\|v_r\| \|n\|}.$$

Si osservi che anche \widehat{rH} è un angolo acuto.

5.4 Distanze negli spazi affini euclidei

Grazie al prodotto scalare su V , è possibile definire anche una distanza in \mathbb{E} , rendendolo uno spazio metrico e, di conseguenza, uno spazio topologico.

Definizione 5.4.1. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se $P, Q \in \mathbb{E}$, diciamo *distanza tra P e Q* il numero reale non negativo

$$d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Proposizione 5.4.2. Se $P, Q, R \in \mathbb{E}$ allora:

- i) $d(P, Q) \geq 0$ e vale $d(P, Q) = 0$ se e solo se $P = Q$;
- ii) $d(P, Q) = d(Q, P)$;
- iii) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$.

Dimostrazione. (i) e (ii) sono lasciate per esercizio, in quanto immediate. (iii) Per la Relazione di Chasles (SA2) si ha $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$, dunque

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}\| \leq \|\overrightarrow{RQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\|,$$

per la proprietà triangolare della norma indotta da un prodotto scalare □

Più in generale, diamo la seguente nozione.

Definizione 5.4.3. Sia \mathbb{E} uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se $X, Y \subseteq \mathbb{E}$ sono due sottoinsiemi non vuoti, diciamo *distanza tra X e Y* il numero reale non negativo

$$d(X, Y) := \inf \{d(P, Q) \mid P \in X, Q \in Y\}.$$

Si osservi che tale estremo inferiore esiste in quanto l'insieme su cui si calcola è costituito da numeri reali maggiori o uguali di zero.

Per i sottospazi euclidei vale il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione; ne vedremo un caso particolare.

Teorema 5.4.4. In uno spazio euclideo \mathbb{E} sullo spazio vettoriale euclideo V , si considerino due sottospazi euclidei $X \ni A$ e $Y \ni B$, dove $A, B \in \mathbb{E}$ e con $U, W \subseteq V$ le rispettive giaciture.

Allora esistono $P_0 \in X$ e $Q_0 \in Y$ tali che il vettore $Q_0 - P_0$ è ortogonale sia a U che a W e, per ogni $P \in X$ e $Q \in Y$, si ha $\|Q_0 - P_0\| \leq \|Q - P\|$. Pertanto $d(X, Y) = d(P_0, Q_0)$.

In quanto segue considereremo come ambiente lo spazio affine euclideo canonico $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ con un riferimento cartesiano (O, \mathcal{B}) .

In tale ambito, diamo la seguente nozione.

Definizione 5.4.5. Se $A, B \in \mathbb{E}^n$ diciamo *punto medio del segmento* \overline{AB} l'unico punto $M \in \overline{AB}$ tale che

$$d(A, M) = d(M, B).$$

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la proiezione, su un sottospazio affine S di \mathbb{A}^n , parallela a un sottospazio vettoriale U di \mathbb{R}^n (complementare alla giacitura di S).

In uno spazio euclideo possiamo considerare la situazione particolare in cui U è l'ortogonale della giacitura di S e dare la seguente nozione.

Definizione 5.4.6. Sia $S \ni Q$ un sottospazio euclideo di \mathbb{E}^n , con giacitura $W \subset V$. Si dice *proiezione ortogonale su S* l'applicazione

$$p_W : \mathbb{E}^n \longrightarrow S \quad \text{data da} \quad P \mapsto T_P(U) \cap S$$

dove $U = W^\perp$.

Il punto $P_0 = T_P(W^\perp) \cap S$ si dice *proiezione ortogonale di P su S* .

Esempio 5.4.7. Si considerino il punto $P = (1, 2, 3) \in \mathbb{E}^3$ e il piano di equazione $H : x - y + 3z + 1 = 0$. Per determinare la proiezione ortogonale P_0 di P su H , calcoliamo anzitutto la giacitura W di H e il sottospazio W^\perp . Quest'ultimo è la retta vettoriale

$$W^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Per definizione $P_0 = T_P(W^\perp) \cap H$. Poiché $r : (x, y, z) = (1 + t, 2 - t, 3 + 3t)$, bisogna determinare t in modo che

$$(1 + t) - (2 - t) + 3(3 + 3t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -9/11.$$

Sostituendo nell'equazione parametrica di r si ottiene infine

$$P_0 = (1 - 9/11, 2 + 9/11, 3 - 27/11) = (2/11, 31/11, 6/11).$$

La nozione di proiezione ortogonale verrà ora utilizzata nel trovare dei metodi per determinare alcune distanze.

Il primo caso è quello di distanza di un punto da un sottospazio euclideo.

Proposizione 5.4.8. Siano S un sottospazio euclideo e $Q \in \mathbb{E}^n$. Allora, posta Q_0 la proiezione ortogonale di Q su S , si ha

$$d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

Dimostrazione. Basta provare che, comunque scelto un punto $P \in S$, si ha $d(Q, P) \geq d(Q, Q_0)$ o, equivalentemente, che

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 \geq \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2.$$

Se W è la giacitura di $S \ni P$, si ha $\overrightarrow{Q_0P} \in W$. D'altro canto, per definizione di proiezione ortogonale, $\overrightarrow{Q_0Q} \in W^\perp$. Per (SA2) si ha inoltre

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ_0} + \overrightarrow{Q_0Q}.$$

Quindi

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ_0}\|^2 + \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2 \geq \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2.$$

□

Proposizione 5.4.9. *Si fissi un riferimento cartesiano di \mathbb{E}^n e si considerino un punto $Q = (q_1, \dots, q_n)$ e un iperpiano $H : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$. Allora*

$$d(Q, H) = \frac{|a_1q_1 + \dots + a_nq_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Dimostrazione. Si consideri un versore (cioè un vettore di norma 1) ortogonale a H , ad esempio

$$n := \frac{(a_1, \dots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Essendo anche $\overrightarrow{Q_0Q}$ ortogonale a H , si ha

$$|\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle| = \|\overrightarrow{Q_0Q}\| = d(Q, Q_0) = d(Q, H),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla Proposizione precedente.

Per calcolare il suddetto prodotto scalare, basta scegliere un qualunque punto $P \in H$, applicare la Relazione di Chasles (SA2) e la bilinearità, ottenendo

$$\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle + \langle \overrightarrow{Q_0P}, n \rangle.$$

Ma $\langle \overrightarrow{Q_0P}, n \rangle = 0$ in quanto $\overrightarrow{Q_0P}$ appartiene alla giacitura di H , che è $\text{Span}(n)^\perp$.

Pertanto

$$d(Q, H) = |\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle| = |\langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle|.$$

Denotando le coordinate di P con (y_1, \dots, y_n) e tenendo conto che $P \in H$, vale $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = -b$. Quindi

$$d(Q, H) = \frac{|\langle (q_1 - y_1, \dots, q_n - y_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

da cui la tesi. □

Osservazione 5.4.10. Se S e T sono due sottospazi paralleli di \mathbb{E}^n e $S \cap T = \emptyset$ allora la loro distanza è non nulla. Vediamo come determinarla.

Sia $\dim(T) \leq \dim(S)$. Allora, scelto un qualunque punto $Q \in T$ e denotando con Q_0 la proiezione ortogonale di Q su S , si ha

$$d(T, S) = d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

Chiaramente, se $\dim(T) = \dim(S)$, i ruoli di S e T si possono scambiare.

Esempio 5.4.11. Si considerino la retta r e il piano π di \mathbb{E}^3 dati da

$$r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 2), \quad \pi : x + 2y + 4 = 0.$$

Poiché le rispettive giaciture sono $W_r = \langle (2, -1, 2) \rangle$ e $W_\pi : x + 2y = 0$, si vede immediatamente che $W_r \subset W_\pi$ e dunque $r \parallel \pi$. Tenendo conto che $\dim(r) = 1 < 2 = \dim(\pi)$, per l'Osservazione dispar si ha che $d(r, \pi) = d(Q, \pi)$, dove Q è un qualunque punto di r . Ad esempio, si scelga $Q = (1, 0, 0)$ e si calcoli, per la Proposizione dishy,

$$d(Q, \pi) = \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5}.$$

Esempio 5.4.12. Si considerino i due piani paralleli π_1 e π_2 di \mathbb{E}^3 dati da

$$\pi_1 : x + 2y - z + 4 = 0, \quad \pi_2 : x + 2y - z + 10 = 0.$$

Si ha

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(Q, \pi_2),$$

dove Q è un qualunque punto di π_1 . Ad esempio, si scelga $Q = (0, 0, 4)$ e si calcoli, ancora per la Proposizione dishy,

$$d(Q, \pi_2) = \frac{|-4 + 10|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6}.$$

Esempio 5.4.13. Si considerino le due rette parallele r_1 e r_2 di \mathbb{E}^3 date da

$$r_1 : (x, y, z) = (3, -1, 1) + \lambda(2, -1, 2), \quad r_2 : (x, y, z) = (2, 1, 3) + \mu(2, -1, 2).$$

In questo caso si deve procedere diversamente dai due precedenti esempi. Osserviamo però che per l'Osservazione 5.4.10 abbiamo

$$d(r_1, r_2) = d(Q, Q_0),$$

dove $Q \in r_1$ e Q_0 è la proiezione ortogonale di Q su r_2 . Invece di scegliere un punto su r_1 , si noti che si può procedere ancora più rapidamente considerando un piano π ortogonale a entrambe le rette. Evidentemente π interseca ogni retta in un punto e questi due punti sono uno la proiezione ortogonale dell'altro sull'altra retta. Pertanto, posti $Q_1 := \pi \cap r_1$ e $Q_2 := \pi \cap r_2$, si ha

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2),$$

Si scelga, ad esempio, $\pi : 2x - y + 2z = 0$. Con facili calcoli si vede che

$$Q_1 := \pi \cap r_1 = (1, 0, -1), \quad Q_2 := \pi \cap r_2 = (0, 2, 1).$$

Pertanto

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2) = \|Q_1 - Q_2\| = \|(1, -2, -2)\| = 3.$$

Concludiamo questo paragrafo con la determinazione della distanza tra due rette sghembe dello spazio euclideo canonico \mathbb{E}^3 , assieme alle nozioni di *retta e segmento di minima distanza*.

Teorema 5.4.14. *Siano r e s due rette sghembe di \mathbb{E}^3 . Allora si ha:*

- i) *esiste un'unica coppia π_r e π_s di piani paralleli a entrambe le rette (e paralleli tra loro) tali che $r \subset \pi_r$ e $s \subset \pi_s$;*
- ii) *esiste un'unica retta t ortogonale e incidente r e s (detta retta di minima distanza);*
- iii) *posti $R := t \cap r$ e $S := t \cap s$, si ha*

$$d(r, s) = d(\pi_r, \pi_s) = d(R, S),$$

dove il segmento \overline{RS} è detto segmento di minima distanza tra r e s .

Dimostrazione. Siano r determinata da $A \in r$ e con giacitura $\text{Span}(v_r)$ e s da $B \in s$ e giacitura $\text{Span}(v_s)$.

i) I due piani cercati sono necessariamente i piani π_r e π_s determinati, ad esempio, da $A \in \pi_r$ e $B \in \pi_s$, ed entrambi di giacitura

$$W_{\pi_r} = W_{\pi_s} = \text{Span}(v_r, v_s).$$

Si noti che questi sono veramente due piani in quanto $\dim_{\mathbb{R}} \text{Span}(v_r, v_s) = 2$ poiché v_r e v_s non sono paralleli per ipotesi.

ii) Si consideri l'unica (a meno di multipli) direzione w ortogonale sia a r che a s (e quindi anche ortogonale a π_r e π_s), data da

$$\text{Span}(w) := \text{Span}(v_r, v_s)^\perp.$$

Denotiamo con ρ l'unico piano del fascio di piani \mathcal{F}_r di sostegno r che contiene w nella sua giacitura; e, analogamente, denotiamo con σ l'unico piano del fascio di piani \mathcal{F}_s di sostegno s che contiene w nella sua giacitura.

Si ha quindi

$$W_\rho = \text{Span}(v_r, w), \quad W_\sigma = \text{Span}(v_s, w).$$

Per costruzione $t := \rho \cap \sigma$ è una retta di giacitura $W_\rho \cap W_\sigma = \text{Span}(w)$, che risulta dunque ortogonale sia a r che a s .

Inoltre, t e r giacciono entrambe sul piano ρ e sono ortogonali, quindi non parallele; pertanto sono incidenti.

Analogamente t e s sono incidenti.

Per provare l'unicità di t , supponiamo che esista un'altra retta t' ortogonale e incidente r e s . Per quanto osservato all'inizio, c'è un'unica direzione w ortogonale a r e a s , dunque $t' \parallel t$. In particolare, t e t' sono complanari. Per questo, denotando con $R' := t' \cap r$ e $S' := t' \cap s$, si ha che i punti R, S, R', S' sono complanari. Il piano che li contiene, pertanto, deve contenere r (individuata da R e R') e analogamente s ; questo è un assurdo in quanto r e s sono sghembe per ipotesi.

iii) Si noti che

$$d(r, s) := \inf \{d(P, Q) \mid P \in r, Q \in s\} \geq d(\pi_r, \pi_s).$$

Se si prova che $d(\pi_r, \pi_s)$ è raggiunta dalla coppia di punti $R \in r$ e $S \in s$, allora si ha la tesi. Per fare questo, basta osservare che la retta t è ortogonale a π_r e π_s per (ii) e che

$$R = t \cap r = t \cap \pi_r, \quad S = t \cap s = t \cap \pi_s.$$

Dunque S è la proiezione ortogonale di R su π_s ; pertanto $d(\pi_r, \pi_s) = d(R, S)$. □

Capitolo 6

Isometrie

6.1 Isometrie e Matrici Ortogonali

Definizione 6.1.1. Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo. Una isometria di (V, g) è un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ tale che $\forall u, v \in V$, vale:

$$g(f(u), f(v)) = g(u, v).$$

Osservazione 6.1.2. Se $f : V \rightarrow V$ è una isometria, allora f è iniettiva. Infatti, se $v \in \ker(f)$, allora $f(v) = 0_V$, quindi $g(f(v), f(v)) = g(0_V, 0_V) = 0$. Sfruttando ora il fatto che f è una isometria abbiamo: $0 = g(f(v), f(v)) = g(v, v)$, quindi $v = 0_V$.

Infine, se $\dim V = n < \infty$, per il Teorema di Dimensione f è un automorfismo.

Proposizione 6.1.3. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è una isometria di (V, g) .
2. Per ogni base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di (V, g) , anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) .
3. $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in V$.

Dimostrazione. • $(1 \Rightarrow 2)$ Se $f \in \text{End}(V)$ è una isometria, e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di (V, g) , allora $g(f(v_i), f(v_j)) = g(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$. Quindi $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono tutti non nulli (perché hanno norma = 1) e sono a due a due ortogonali. Quindi $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, perciò $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) .

- (2 \Rightarrow 3) Fissiamo una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di (V, g) . Per ipotesi anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) . Sia ora $v \in V$. Scriviamo v come combinazione lineare dei vettori v_1, \dots, v_n : $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Allora

$$f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n).$$

Siccome $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale,

$$\|v\|^2 = g(v, v) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Siccome anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è ortonormale,

$$\|f(v)\|^2 = g(f(v), f(v)) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Ne segue che $\|v\|^2 = \|f(v)\|^2$, da cui il risultato.

- (3 \Rightarrow 1) Siano $v, w \in V$. Dalla formula di polarizzazione si ha:

$$g(f(v), f(w)) = \frac{1}{2}g(f(v) + f(w), f(v) + f(w)) - g(f(v), f(v)) - g(f(w), f(w)).$$

Si ha quindi

$$= \frac{1}{2}\|f(v) + f(w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2.$$

Per ipotesi, $\|f(u)\|^2 = \|u\|^2, \forall u \in V$, quindi

$$\frac{1}{2}\|f(v + w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2 = \frac{1}{2}\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 = g(v, w),$$

nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la formula di polarizzazione. Ne segue che $g(f(v), f(w)) = g(v, w), \forall v, w \in V$, quindi f è una isometria. □

Proposizione 6.1.4. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di (V, g) . Sia $f \in \text{End}(V)$.

Allora f è una isometria di (V, g) se e solo se

$${}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathbb{I}_n.$$

Dimostrazione. Dalla precedente proposizione segue che f è una isometria $\iff g(f(v_i), f(v_j)) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$. Per definizione di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, se indichiamo con a_{ij} il suo elemento di posto (i, j) , abbiamo:

$$f(v_\ell) = a_{1\ell} v_1 + \dots + a_{n\ell} v_n, \quad \forall \ell = 1, \dots, n.$$

Quindi f è una isometria $\iff \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$. Il risultato segue ora dal fatto che $\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$ è l'elemento di posto (i, j) della matrice ${}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. □

Definizione 6.1.5. Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ è detta ortogonale, se vale la seguente uguaglianza:

$${}^t A \cdot A = \mathbb{I}_n.$$

L'insieme delle matrici $n \times n$ ortogonali si denota con $O(n)$.

Osservazione 6.1.6. 1. $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale $\iff A$ è invertibile ed $A^{-1} = {}^t A$.

2. Sia $A \in O(n)$, allora $\det(A) = \pm 1$. Infatti, dall'uguaglianza $\mathbb{I}_n = {}^t A \cdot A$, dal teorema di Binet, sfruttando il fatto che $\det({}^t A) = \det(A)$, si ha:

$$1 = \det(\mathbb{I}_n) = \det({}^t A \cdot A) = (\det(A))^2.$$

Corollario 6.1.7. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora $A \in O(n) \iff L_A$ è una isometria di $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$, dove \langle, \rangle è il prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. L'enunciato segue ricordando che la base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^n è ortonormale per \langle, \rangle , e si ha $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L_A) = A$. □

Proposizione 6.1.8. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita n . Sia \mathcal{B} una base ortonormale di (V, g) , e sia \mathcal{C} una base di V . Allora \mathcal{C} è ortonormale $\iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \in O(n)$.

Dimostrazione. Osserviamo che \mathcal{C} è ortonormale $\iff M_{\mathcal{C}}(g) = \mathbb{I}_n$, dove $M_{\mathcal{C}}(g)$ è la matrice che rappresenta il prodotto scalare g rispetto alla base \mathcal{C} . Quindi:

$$M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V).$$

Siccome \mathcal{B} è ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(g) = \mathbb{I}_n$, quindi la precedente formula diventa:

$$M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V),$$

da cui segue il risultato. □

Corollario 6.1.9. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora $A \in O(n)$ se e solo se le colonne di A , $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n .

6.2 Caratterizzazione delle matrici di $O(2, \mathbb{R})$

Proposizione 6.2.1. Sia $A \in O(2, \mathbb{R})$. Allora:

- se $\det(A) = 1$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

- se $\det(A) = -1$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Quindi le matrici ortogonali 2×2 sono tutte e sole le matrici aventi una delle forme precedenti.

Dimostrazione. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Allora, per definizione, A è ortogonale se e solo se

$$\mathbb{I}_2 = {}^t A \cdot A,$$

cioè se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Dalle equazioni $a^2 + c^2 = 1$ e $b^2 + d^2 = 1$, segue che i punti $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ appartengono alla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine in \mathbb{R}^2 .

In particolare esistono $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ tali che $a = \cos \phi$, $c = \sin \phi$, $b = \cos \psi$ e $d = \sin \psi$.

Inoltre, dalla equazione $ab + cd = 0$ deduciamo

$$0 = \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi = \sin(\theta + \varphi).$$

Di conseguenza, $\theta + \varphi$ deve essere $0 + 2k\pi$ o $\pi + 2k\pi$.

Nel primo caso si ottiene la matrice R_θ ; nel secondo caso si ottiene la matrice S_θ . \square

Vediamo ora che possiamo caratterizzare anche autovalori e autospazi delle matrici di $O(2, \mathbb{R})$.

Proposizione 6.2.2. Per una matrice $M \in O(2)$ ci sono le seguenti possibilità:

- se $M = R_\theta$, essa ha autovalori reali se e solo se $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$ se e solo se $R_\theta = \pm \mathbb{I}_2$.
- Se $M = S_\theta$, essa ha sempre autovalori reali e precisamente ± 1 . Inoltre i relativi autospazi V_1 e V_{-1} sono tra loro ortogonali.

Dimostrazione. *i)* Si consideri il polinomio caratteristico di R_θ dato da

$$P_\lambda(R_\theta) = \det(R_\theta - \lambda \mathbb{I}_2) = (\cos \theta - \lambda)^2 + (\sin \theta)^2 = \lambda^2 - 2(\cos \theta)\lambda + 1.$$

Esso ha radici reali se e solo se il suo discriminante $\Delta/4 = (\cos \theta)^2 - 1 \geq 0$. Ma tale condizione equivale ovviamente a $(\cos \theta)^2 - 1 = 0$; questo si verifica se e solo se $\cos \theta = \pm 1$ ovvero se e solo se $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$. L'ultima affermazione è banale. *ii)* Si osservi anzitutto che S_θ , essendo una matrice 2×2 simmetrica reale, ha due autovalori reali e, se distinti, i suoi due autospazi sono ortogonali. Per calcolare tali autovalori, si consideri il polinomio caratteristico di S_θ dato da

$$P_\lambda(S_\theta) = \det(S_\theta - \lambda \mathbb{I}_2) = \lambda^2 - 1.$$

Esso è indipendente da θ e ha sempre come radici ± 1 . □

Osservazione 6.2.3. Per comprendere il significato geometrico di R_θ , basta considerare l'automorfismo di \mathbb{R}^2 ad essa associato:

$$L_{R_\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definito da

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Utilizzando le coordinate polari nel dominio e nel codominio, si ha una forma esplicita più significativa. Infatti

$$r(\cos \psi, \sin \psi) \mapsto (r \cos \psi \cos \theta - r \sin \psi \sin \theta, r \cos \psi \sin \theta + r \sin \psi \cos \theta)$$

e quest'ultima espressione è esattamente $r(\cos(\psi + \theta), \sin(\psi + \theta))$. Pertanto R_θ è associata alla rotazione di angolo θ .

Vediamo ora come anche le matrici S_θ abbiano una interpretazione geometrica, e precisamente in termini di simmetrie assiali. Vediamo prima questo concetto in generale.

Definizione 6.2.4. Sia H è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n ; possiamo scrivere ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$ in modo unico come $v = v_H + v_{H^\perp}$, dove $v_H \in H$ e $v_{H^\perp} \in H^\perp$.

Si dice *simmetria rispetto a H* l'applicazione

$$\text{sy}_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{definita da} \quad v = v_H + v_{H^\perp} \mapsto v_H - v_{H^\perp}.$$

Esempio 6.2.5. In \mathbb{R}^2 la simmetria rispetto alla retta L (asse x) è data da $\text{sy}_L(x, y) = (x, -y)$, mentre la simmetria rispetto all'origine si esprime come $\text{sy}_O(x, y) = (-x, -y)$. Come si esprime la simmetria rispetto alla retta $x = y$?

Proposizione 6.2.6. Con le notazioni precedenti, l'applicazione sy_H è un automorfismo ortogonale di \mathbb{R}^n in quanto la sua matrice associata (rispetto a una base ortonormale) è ortogonale.

In particolare, se H è un iperpiano, tale matrice è ortogonale non speciale.

Dimostrazione. È facile verificare che sy_H è un'applicazione lineare. Sia $s := \dim(H)$. Se $s = 0$, la tesi segue banalmente. Sia dunque $s \geq 1$ e sia $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_s)$ una base ortonormale di H . Si consideri il suo completamento a una base ortonormale $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_s, \dots, v_n)$ di \mathbb{R}^n . La matrice associata, rispetto a \mathcal{B} , alla simmetria risulta

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{sy}_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

dove sulla diagonale compare 1 per s volte e -1 per $n - s$ volte. Tale matrice è ortogonale. Pertanto, per la Proposizione 6.1.4, l'endomorfismo sy_H è un automorfismo ortogonale.

Infine, se H è un iperpiano, allora $s = n - 1$ e dunque $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{sy}_H)) = -1$, pertanto la matrice è ortogonale non speciale. \square

Esempio 6.2.7. Vediamo due esempi di matrici non speciali S_{θ} nei casi $\theta = 0$ e $\theta = \pi$:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_{\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale di \mathbb{R}^2 è dato da $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Nel secondo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale è dato da $(x, y) \mapsto (-x, y)$.

Le matrici S_0 e S_{π} sono associate, rispettivamente, alla simmetria rispetto a $\text{Span}(e_1)$ (asse x) e a quella rispetto a $\text{Span}(e_2)$ (asse y).

Vediamo ora che le matrici S_{θ} sono sempre associate a delle opportune simmetrie.

Proposizione 6.2.8. Per ogni matrice del tipo S_{θ} , l'applicazione lineare associata $L_{S_{\theta}}$ è una simmetria rispetto al sottospazio $\text{sy}_{V_1} \subset \mathbb{R}^2$, dove V_1 è l'autospazio di S_{θ} associato all'autovalore 1.

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_1^{\perp} = V_1 \oplus V_{-1}$. Quindi, per ogni $v \in \mathbb{R}^2$, si può scrivere $v = v_{V_1} + v_{V_{-1}}$. Da una parte, per definizione di autovettore, ovviamente $S_{\theta}(v_{V_1}) = v_{V_1}$ e $S_{\theta}(v_{V_{-1}}) = -v_{V_{-1}}$. Pertanto, per la linearità,

$$S_{\theta} \cdot v = v_{V_1} - v_{V_{-1}}.$$

D'altra parte, per definizione di simmetria rispetto a V_1 , si ha

$$s_{V_1}(v) = v_{V_1} - v_{V_1^\perp}.$$

□

Osservazione 6.2.9. Determiniamo, in generale, l'autospazio V_1 di

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Una equazione cartesiana di V_1 è data da una riga del sistema lineare omogeneo

$$(S_\theta - \mathbb{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Se $\theta \neq 0$, una equazione è, ad esempio,

$$V_1 : (\cos \theta - 1)x + (\sin \theta)y = 0.$$

Possiamo, inoltre, determinare l'angolo acuto α tra V_1 e l'asse x data da $\text{Span}(e_1)$. Si ha:

$$\cos \alpha = \frac{\left| \left\langle \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right|}{\left\| \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|\sin \theta|}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}}.$$

Infine, usando le formule di duplicazione $\sin \theta = 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2$ e $\cos \theta = \cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2$, si trova

$$\cos \alpha = |\cos \theta/2|,$$

quindi $\alpha = \theta/2$ se $0 < \theta \leq \pi$, e invece $\alpha = \pi - \theta/2$ se $\pi \leq \theta < 2\pi$.

Le seguenti semplici proprietà sono lasciate come esercizio (alcune di queste possono essere dimostrate utilizzando note formule trigonometriche).

Proposizione 6.2.10. *Comunque scelti θ e φ , valgono:*

- i) $S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi} \in SO(2)$;
- ii) $R_\theta R_\varphi = R_{\varphi+\theta} \in SO(2)$;
- iii) $R_\theta S_\varphi = S_{\varphi+\theta} \notin SO(2)$;
- iv) $S_\varphi R_\theta = S_{\varphi-\theta} \notin SO(2)$;
- v) $S_{2\theta} = R_\theta S_0 R_{-\theta}$.

In particolare, la composizione di una rotazione e di una simmetria non è commutativa.

Dalla ii) segue che $SO(2)$ è un gruppo abeliano (però $SO(n)$ non è abeliano per $n \geq 3$).

Diamo soltanto lo schema della dimostrazione del teorema, senza entrare in tutti i dettagli, che comunque non sono difficili.

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su $n = \dim V$.

La base dell'induzione consiste nei casi $n = 1$ e $n = 2$. Se $n = 1$, una matrice ortogonale è uguale a (1) o a (-1) , quindi del tipo (6.3.1). Se $n = 2$, fissata una base ortonormale di V , f è rappresentata da una matrice del tipo R_α o S_α . Nel primo caso abbiamo uno dei blocchi 2×2 della (6.3.1), nel secondo caso la matrice è diagonalizzabile con autovalori $1, -1$; prendendo due versori v_1, v_2 nei relativi autospazi, otteniamo una base ortonormale rispetto a cui la matrice di f è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Per dimostrare il passo induttivo, avremo bisogno del seguente lemma.

Lemma 6.3.2. *Sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Allora esiste un sottospazio vettoriale $W \subset V$, con $\dim W = 1$ o $\dim W = 2$, tale che $f(W) \subset W$; un tale sottospazio è detto invariante rispetto a f .*

Idea della dimostrazione del Lemma. Se f ha un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$, sia v un suo autovettore: $f(v) = \lambda v$. Allora $W = \langle v \rangle$ ha dimensione 1 ed è invariante per f , perchè $f(cv) = cf(v) = c\lambda v \in W$.

Altrimenti, se f non ha autovalori reali, sia \mathcal{B} una base di V e sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, matrice reale $n \times n$. Passiamo quindi all'ambiente complesso, considerando l'applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad z \rightarrow A \cdot z.$$

Ora, poichè siamo su \mathbb{C} , l'applicazione L_A ha almeno un autovalore (non reale) $\lambda \in \mathbb{C}$; infatti, λ è una radice complessa di $p_{L_A}(x) = p_A(x)$, polinomio a coefficienti reali perchè A è reale.

Si provano ora i seguenti fatti:

1. anche il numero complesso coniugato $\bar{\lambda}$ è radice di $p_A(x)$ ed è dunque autovalore di L_A ;
2. fissato v un autovettore di λ , allora il suo coniugato \bar{v} è un autovettore di $\bar{\lambda}$, e v, \bar{v} sono linearmente indipendenti;
3. i vettori $v + \bar{v}, i(v - \bar{v})$ sono reali, linearmente indipendenti e generano un sottospazio W' di \mathbb{R}^n invariante per $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ossia $L_A(W') \subset W'$;
4. consideriamo l'isomorfismo $\kappa_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$; in questo isomorfismo W' corrisponde a un sottospazio W di V invariante per f , di dimensione 2.

Questo conclude la dimostrazione del Lemma. □

Torniamo a $f : V \rightarrow V$ isometria lineare, con $\dim V = n > 2$. Per il Lemma precedente esiste un sottospazio $W \subset V$ invariante per f di dimensione 1 o 2, ovvero tale che $f(W) \subset W$. Siccome f è un isomorfismo, $\dim W = \dim f(W)$, e perciò $f(W) = W$. Da ciò si dimostra che anche $f(W^\perp) = W^\perp$.

Ora possiamo considerare le restrizioni

$$f|_W : W \rightarrow W, \quad f|_{W^\perp} : W^\perp \rightarrow W^\perp;$$

entrambi gli endomorfismi ristretti risultano delle isometrie. Possiamo quindi prendere due basi ortonormali \mathcal{B}_1 di W come nella base dell'induzione, e \mathcal{B}_2 di W^\perp come da ipotesi induttiva; essendo $V = W \oplus W^\perp$, l'unione di \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 è una base \mathcal{B} ortonormale di V , e $M_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice a blocchi della forma

$$\left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}_1}(f|_W) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}_2}(f|_{W^\perp}) \end{array} \right)$$

come richiesto dal teorema. □

Corollario 6.3.3 (Corollario per le matrici ortogonali). *Se A è una matrice ortogonale, allora esiste una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS = {}^tSAS$ è della forma descritta dal Teorema 6.3.1.*

6.4 Isometrie lineari di \mathbb{R}^3

Applichiamo il teorema appena visto al caso $n = 3$.

In questo caso il polinomio caratteristico $p_f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ha grado 3, dunque può avere o 3 radici reali, o una radice reale e due radici complesse coniugate.

In ogni caso f ha almeno un autovalore reale λ_1 ; affermiamo che λ_1 è uguale a 1 o a -1 . Questo vale, in generale, per gli autovalori reali di isometrie lineari per il seguente risultato.

Lemma 6.4.1. *Sia $A \in O(n)$, e sia $\lambda \in Sp(A)$. Allora $\lambda = \pm 1$.*

Dimostrazione. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di A relativo all'autovalore λ , quindi $v \neq 0$ e $A \cdot v = \lambda v$. Poiché $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una isometria, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\langle v, v \rangle = \langle A \cdot v, A \cdot v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Siccome $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 \neq 0$, segue che $\lambda^2 = 1$, da cui il risultato. □

Torniamo al caso $n = 3$; sia v_1 un versore autovettore di λ_1 ; allora

$$W := \text{Span}(v_1)^\perp$$

ha dimensione 2 ed è invariante: $f(W) = W$. Presa una base ortonormale \mathcal{B}' di W formata da v_2, v_3 , la matrice di f rispetto a $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & A' & \end{pmatrix}$$

dove A' rappresenta $f|_W$ rispetto a \mathcal{B}' , dunque $A' \in O(2)$.

Ora distinguiamo i seguenti casi:

1. $\det(A) = 1, \lambda_1 = -1$: allora $\det(A') = -1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

rotazione di π intorno all'asse y ;

2. $\det(A) = 1, \lambda_1 = 1$: allora $\det(A') = 1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$:

rotazione di α intorno all'asse x ;

3. $\det(A) = -1, \lambda_1 = 1$: allora $\det(A') = -1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: riflessione

rispetto al piano xy che è fisso, ed è l'autospazio di autovalore 1;

4. $\det(A) = -1, \lambda_1 = -1$: allora $\det(A') = 1$ e la forma normale è $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Nei due casi in cui $\det(A) = 1$, abbiamo una rotazione intorno a un asse, in effetti il gruppo ortogonale speciale $SO(3)$ è detto anche gruppo delle rotazioni di \mathbb{R}^3 .

6.5 Esempio di calcolo della forma normale ortogonale

Sia A la matrice ortogonale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vogliamo trovare la sua forma normale ortogonale. Si ha $\det(A) = 1$, quindi $A \in SO(3)$ e rappresenta una rotazione intorno a un asse (Esempio 6.4). Si ha: $p_A(x) = -(x^3 - 1) = -(x - 1)(x^2 + x + 1)$, quindi l'unico autovalore reale è $\lambda = 1$. Si trova che

$$\text{Aut}(1) = \text{Span}(u_1) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right);$$

normalizzando il generatore u_1 si trova

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Imponendo l'ortogonalità al vettore v_1 rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^3 , si trova l'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ che definisce il suo ortogonale $W = v_1^\perp$. Allora

$$W = \text{Span}(u_2, u_3) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Vogliamo trovare una base ortonormale per W : possiamo procedere con Gram-Schmidt, oppure considerare il prodotto vettoriale di u_1, u_2 per trovare un vettore ortogonale a entrambi:

$$u_1 \wedge u_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -e_1 - e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Questo vettore è ortogonale a u_1 e u_2 dunque appartiene a W e, con u_2 , forma una sua base ortogonale. Normalizziamo:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

i versori v_2, v_3 formano una base ortonormale di W .

Calcoliamo, infine, la matrice di $L_A|_W$ rispetto a questa base:

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad Av_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo esprimere i due vettori come combinazione lineare di v_2 e v_3 ; facendo il conto otteniamo

$$Av_2 = -\frac{1}{2}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_3, \quad Av_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3.$$

Quindi la forma normale trovata è:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} :$$

concludiamo che L_A è la rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ intorno all'asse di rotazione $\text{Aut}(1) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Si ha $A' = {}^tSAS$ dove S è la matrice che contiene nelle colonne le coordinate di v_1, v_2, v_3 :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Capitolo 7

Isometrie degli spazi affini euclidei

Definizione 7.0.1. Si dice *isometria affine* dello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ una affinità f la cui parte lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una isometria lineare. L'insieme delle isometrie di \mathbb{E}^n si denota con $\text{Iso}(\mathbb{E}^n)$.

Proposizione 7.0.2. L'insieme $\text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ è un gruppo rispetto alla composizione, ed è un sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{E}^n)$.

Dimostrazione. Basta ricordare che le isometrie lineari di \mathbb{R}^n costituiscono un sottogruppo di $GL(n)$, che è infatti il gruppo ortogonale $O(n)$. \square

Si osservi che, in quanto affinità, una isometria $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ ammette un'equazione matriciale del tipo

$$Y = MX + C.$$

Si sottointende che si è fissato un riferimento cartesiano (O, \mathcal{B}) di \mathbb{E}^n , dove \mathcal{B} è una base ortonormale fissata. Nella scrittura precedente, X e Y sono, rispettivamente, le colonne delle coordinate del generico punto $P \in \mathbb{E}^n$ e di $f(P) \in \mathbb{E}^n$. Inoltre con C si denota la colonna delle coordinate di un punto specifico e con M la matrice ortogonale $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Un immediato esempio di isometria è dato dalle traslazioni.

Infatti abbiamo osservato che un'affinità $f \in \text{Aff}(\mathbb{E}^n)$ di equazione $Y = MX + C$ è una traslazione se e solo se $M = \mathbb{I}_n$. In tal caso $f = t_v$, dove $v = \overrightarrow{Of(O)}$. Avendo $\mathbb{I}_n \in O(n)$, l'affermazione è verificata.

Le "proprietà euclidee", cioè quelle che vengono mantenute per isometria, sono le distanze e gli angoli.

Proposizione 7.0.3. Sia $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ . Allora, per ogni $P, Q \in \mathbb{E}^n$ vale

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)).$$

Dimostrazione. Per definizione

$$d(P, Q)^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2$$

e, analogamente, tenendo conto che f è un'affinità di parte lineare φ ,

$$d(f(P), f(Q))^2 = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\|^2 = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\|^2.$$

Si conclude osservando che $\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\|^2$ perché φ è un'isometria lineare. \square

Vediamo ora che le isometrie affini conservano gli angoli tra rette.

Proposizione 7.0.4. *Sia $f \in \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ . Allora, se r e s sono due rette di \mathbb{E}^n , si ha*

$$\widehat{r\hat{s}} = \widehat{f(r)f(s)}.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che l'angolo $\theta = \widehat{r\hat{s}}$ è individuato da

$$\cos \theta = \frac{|\langle v_r, v_s \rangle|}{\|v_r\| \|v_s\|}.$$

L'angolo $\theta' = \widehat{f(r)f(s)}$ è individuato da

$$\cos \theta' = \frac{|\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s) \rangle|}{\|\varphi(v_r)\| \|\varphi(v_s)\|}.$$

Essendo φ un'isometria lineare, si ha

$$\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s) \rangle = \langle v_r, v_s \rangle, \quad \|\varphi(v_r)\| = \|v_r\|, \quad \|\varphi(v_s)\| = \|v_s\|$$

e quindi $\cos \theta = \cos \theta'$. \square

Terminiamo con un risultato sui cambi di riferimenti cartesiani in \mathbb{E}^n .

Teorema 7.0.5. *Siano $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O', \mathcal{B}')$ due riferimenti cartesiani di \mathbb{E}^n e siano (c_1, \dots, c_n) le coordinate del punto O nel riferimento Σ' .*

Se un punto $P \in \mathbb{E}^n$ ha coordinate (x_1, \dots, x_n) rispetto a Σ e coordinate (y_1, \dots, y_n) rispetto a Σ' , allora, posti

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad A := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n})$$

si ha

$$Y = AX + C.$$