

# TROTTOLA DI LAGRANGE

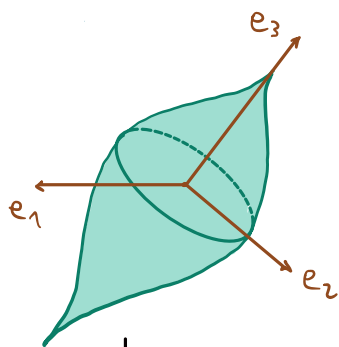
Abbiamo calcolato l' **ENERGIA CINETICA** rotazionale del corpo rigido:

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega}$$

Scegliendo gli assi principali d'inertenza, otteniamo

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad \text{dove } \bar{\omega} = \omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3$$

La TROTTOLA è un corpo rigido con una simmetria di rotazione attorno a un asse.



Con questa scelta di terna solidale ho

$$I_1 = I_2 \quad \text{e} \quad I_3$$

Ricordiamo:  $\mathcal{I}_{ij} = - \sum_{a=1}^N m_a x_{ai} x_{aj} = \rho \int x_i x_j dx_i dx_j dx_k$

$$\Downarrow$$
$$\mathcal{I}_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

almeno uno di quei integrali è  $\int_{-r}^r x dx = 0$

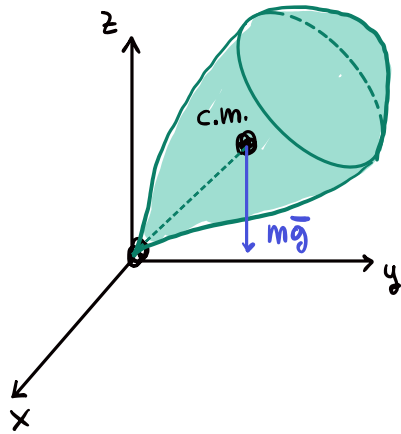
$$T = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

Ricordiamo che

$$\bar{\omega} = (\dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi) \bar{e}_1 + (\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi) \bar{e}_2 + (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}) \bar{e}_3$$

$$= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta)^2$$

Mettiamo la frotole con pto fisso in un campo gravitazionale costante



$$V = -mg z_{c.m.} = mgl \cos\theta$$

$$\Rightarrow L = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta)^2 - mgl \cos\theta$$

- Ci sono due coordinate cicliche,  $\varphi$  e  $\psi$   $\rightarrow$  due cost. del moto

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta) = I_3 \omega_3 \quad \leftarrow M_3$$

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2\theta + I_3 \dot{\varphi} \cos^2\theta + I_3 \dot{\psi} \cos\theta \quad \leftarrow M_2$$

$$= I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + P_\varphi \cos\theta$$

Nel seguito prenderemo  $P_\varphi, P_\psi > 0$

- C'è anche en. totale

$$E = T + V = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta)^2 + mgl \cos\theta$$

$\leadsto$  3 COSTANTI DEL MOTO in un sistema con  $n=3$  gradi di libertà

- Da coord. cicliche  $\rightarrow$  Lagrangiana ridotta:

ricaviamo  $\dot{\varphi}$  e  $\dot{\psi}$  da sist. lineare

$$\begin{cases} P_\psi - \cos\theta P_\varphi = I_1 \dot{\varphi} \sin^2\theta & \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{P_\psi - \cos\theta P_\varphi}{I_1 \sin^2\theta} \\ I_3 \dot{\psi} = P_\varphi - I_3 \dot{\varphi} \cos\theta & \rightarrow \dot{\psi} = \frac{P_\varphi}{I_3} - \frac{\cos\theta (P_\varphi - \cos\theta P_\psi)}{I_1 \sin^2\theta} \end{cases}$$

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta = \frac{P_\psi}{I_3}$$

$$L^* = L|_{\dot{\psi}, \dot{\varphi} = \dots} = \dot{\varphi} P_\varphi - \dot{\psi} P_\psi =$$

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta$$

$$= \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{(P_\varphi - \cos \theta P_\psi)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{P_\psi^2}{I_3}$$

$$- \frac{P_\psi (P_\psi - \cos \theta P_\psi)}{I_1 \sin^2 \theta} - \frac{P_\psi^2}{I_3} + \frac{P_\psi \cos \theta (P_\psi - \cos \theta P_\psi)}{I_1 \sin^2 \theta}$$

$$\rightarrow - \frac{(P_\psi - \cos \theta P_\psi)^2}{I_1 \sin^2 \theta}$$

$$L^* = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta - \frac{(P_\psi - \cos \theta P_\psi)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta}$$

~~$$- \frac{1}{2} \frac{P_\psi^2}{I_3}$$~~

$$L^* = T_{eff} + V_{eff}$$

$$\text{con } T_{eff} = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 \quad \text{e}$$

$$V_{eff}(\theta) = mgl \cos \theta + \frac{(P_\psi - \cos \theta P_\psi)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta}$$

Vogliamo ora disegnare il grafico di  $V_{eff}$  per capire come si comporta qualitativamente il sistema:

- $V_{eff}(\theta)$  è una funzione continua per  $0 < \theta < \pi$
- Agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} V_{eff}(\theta) = +\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} V_{eff}(\theta) = +\infty$$

↳ Qto avviene se  $P_\psi \neq P_\psi$ . Se invece  $P_\psi = P_\psi$ , allora

$$V_{eff} = mgl \cos \theta + \frac{P_\psi^2}{2 I_1} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$$

e  $\lim_{\theta \rightarrow 0} V_{eff}(\theta) = mgl$  (si veda "Trottole addormentate" per lo studio di questo caso).

- Dai due pti sopra si conclude che  $V_{eff}(\theta)$  ha un MINIMO ASSOL. Dobbiamo capire se ha altri pti stazionari.

- Definiamo 
$$g(x) = x + \frac{(P_e - P_\psi x)^2}{2I_{imgl}(1-x^2)}$$

Allora si ha  $V_{eff}(\theta) = \text{imgl } g(\cos\theta)$

- $x = \cos\theta$  è un buon cambiam. di coord perché  $\cos\theta$  è monotono in  $\theta \in [0, \pi[$ ;

- inoltre  $V_{eff}(\theta)$  ha gli stessi pti stazionari di  $g(x)$ ;

in particolare  $V_{eff}(\theta)$  ha un solo minimo in  $\theta \in ]0, \pi[$

se e solo se  $g(x)$  ha un solo minimo in  $x \in ]-1, 1[$ .

- Dimostriamo allora che  $g(x)$  ha un solo minimo:

1) 
$$g'(x) = 1 - \frac{(P_\psi - P_e x)(P_e - P_\psi x)}{I_{imgl}(1-x^2)^2}$$

$$g''(x) = \frac{(1+3x^2)P_e^2 - 2x(3+x^2)P_e P_\psi + (1+3x^2)P_\psi^2}{I_{imgl}(1-x^2)^3}$$

- il denominatore di  $g''(x)$  è POSITIVO  $\forall x \in ]-1, 1[$

- il numeratore di  $g''(x)$  è anche POSITIVO  $\forall x \in ]-1, 1[$ ;

qto è meno ovvio, quindi vediamo il perché:

il numeratore (a meno di un fattore positivo è)

$$\left(\frac{P_e}{P_\psi}\right)^2 - 2 \frac{x(3+x^2)}{1+3x^2} \left(\frac{P_e}{P_\psi}\right) + 1 \quad (*)$$

Qto è un polinomio quadratico nella variabile  $P_4/p_4$ .  
 Siccome il coeff. di  $(P_4/p_4)^2$  è  $> 0$ , qto polinomio  
 è identicam. positivo se il suo discriminante è negativo.

Il discriminante di  $a\xi^2 + b\xi + c$  è  $\Delta = b^2 - 4ac$

Per (a) abbiamo

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{x^2(3+x^2)^2}{(1+3x^2)^2} - 1 = - \frac{(1-x^2)^3}{(1+3x^2)^2} < 0 \quad \text{per } x \in ]-1, 1[.$$

- siccome  $g''(x) > 0 \quad \forall x$ , questo vuol dire  
 che  $g(x)$  ha un solo pto stazionario in  $x \in ]-1, 1[$ .

2) C'è un altro modo per dimostrare che  $V_{eff}(\theta)$  ha  
 un solo pto stazionario.

L'energia del sist. ridotto è

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta + \frac{(P_4 - \cos \theta p_4)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} \quad (*)$$

$$= \frac{I_1}{2} \frac{\dot{x}^2}{1-x^2} + mgl x + \frac{(P_4 - x p_4)^2}{2I_1 (1-x^2)}$$

↑  
 qui abbiamo usato  $x = \cos \theta \Rightarrow \dot{x} = -\dot{\theta} \sin \theta$ .

Ricordiamo che in  
 E abbiamo trascurato  
 il termine cost  
 $\frac{1}{2} \frac{p_4^2}{2I_1}$ ; la vera  
 En. sarebbe  
 $E + p_4^2 / 2I_1$

La retta a En. costante interseca il grafico di  $V_{eff}(\theta)$  e di  $g(x)$   
 nei pti  $x$  per cui  $\dot{x} = 0$ , cioè nei pti  $x$  che  
 risolvono l'equazione

$$(E - mgl x)(1-x^2) - \frac{1}{2I_1} (p_4 - p_4 x)^2 \quad (**)$$

che è un' EQ. CUBICA, quindi con al massimo 3 soluzioni.

Siccome la retta a En. cost. interseca il grafico di  $g(x)$  un numero pari di volte ( $\lim_{\theta \rightarrow 0, \pi} V_{eff} = +\infty$ ), allora le soluzioni di (\*) in  $x \in ]-1, 1[$  saranno al max 2 e quindi c'è un solo pto di minimo.

Chiamiamo  $\theta^*$  ( $x^* = \cos \theta^*$ ) il valore di  $\theta$  in cui  $V_{eff}(\theta)$  è MINIMO.

Domanda: MIN  $\theta^*$  giace prima o dopo di  $\pi/2$ ?

$$g(x) = x + \frac{(P_\phi - x P_\psi)^2}{2 I_{imgl} (1-x^2)} \quad \leadsto \quad g'(x) = 1 + \frac{P_\phi - x P_\psi}{I_{imgl} (1-x^2)} \left[ -P_\psi + \frac{x (P_\psi - x P_\phi)}{1-x^2} \right]$$

•  $\theta^* = \pi/2$  è pto di equilibrio qndo  $g'(0) = 0$ , cioè

$$\text{per } 1 - \frac{P_\phi P_\psi}{I_{imgl}} = 0 \quad \rightarrow \quad P_\phi P_\psi = I_{imgl}$$

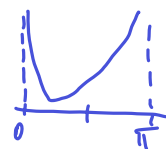
•  $\theta^* = \pi/2 - \epsilon \leadsto x = \epsilon \ll 1$  è pto di equilibrio per

$$0 \approx 1 + \frac{P_\phi - \epsilon P_\psi}{I_{imgl}} [-P_\psi + \epsilon P_\psi] \approx 1 + \frac{1}{I_{imgl}} (-P_\phi P_\psi + \epsilon (P_\psi^2 + P_\phi^2))$$

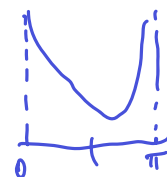
$$\Rightarrow I_{imgl} = P_\phi P_\psi - \epsilon (P_\psi^2 + P_\phi^2) \quad \rightarrow \quad \epsilon = \frac{P_\phi P_\psi - I_{imgl}}{P_\psi^2 + P_\phi^2}$$

Quindi:

$x^* > 0$  ( $\theta^* < \pi/2$ ) se  $P_\phi P_\psi > I_{imgl}$



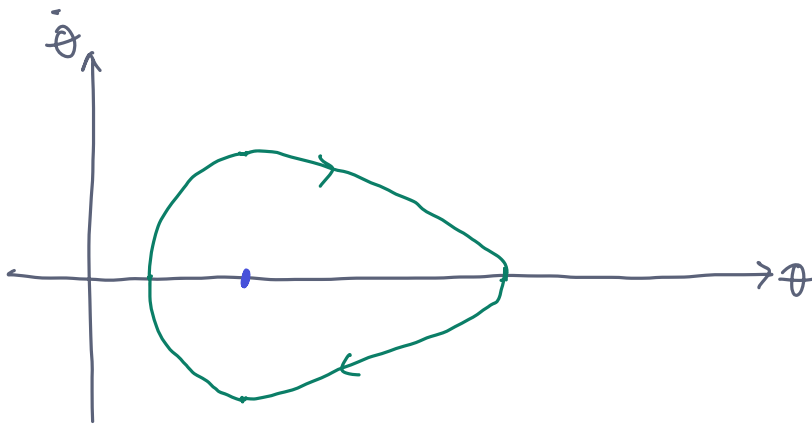
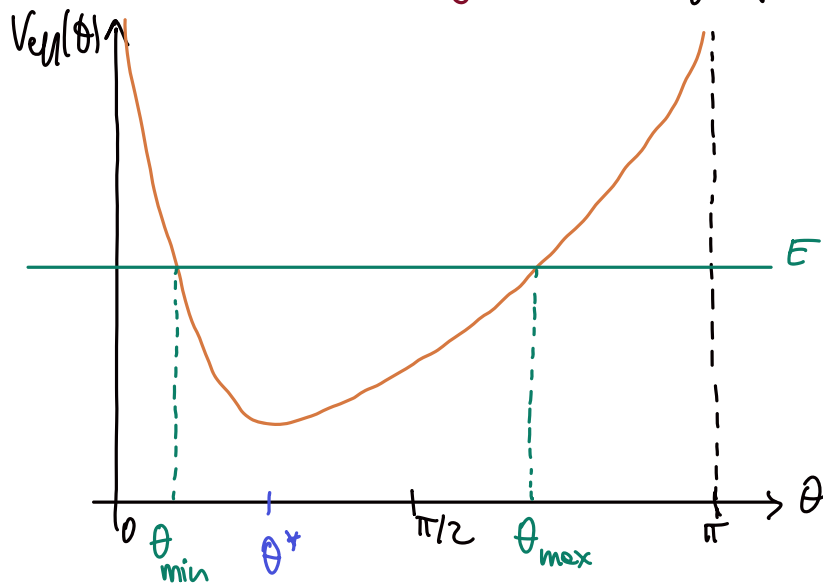
$x^* < 0$  ( $\theta^* > \pi/2$ ) se  $P_\phi P_\psi < I_{imgl}$



- Osservazione:  $g(x) = x + \frac{(P_\phi - x P_\psi)^2}{2 I_{imgl} (1-x^2)} \rightarrow$  se  $x^* \geq 0$  ( $\theta^* < \pi/2$ ), allora

$g(x)$  è def. positiva; infatti  $g(x) \geq g(x^*) > 0$

Consideriamo il caso  $P\phi > I_1 m g l$ : il grafico del potenziale efficace è



- c'è un solo pto di equil. per il problema ridotto corrispondente all'energia minima  $\Rightarrow$  moto con inclinaz. asse cost.
- A en. superiore il moto avviene tra due valori  $\theta_{min}, \theta_{max}$   
 $\Rightarrow$  l'inclinazione dell'asse fa moto pendolo tra  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$ .  $\rightarrow$  MOTO DI **NUTAZIONE**

Vediamo ora il moto di PRECESSIONE ( $\varphi$ ). Abbiamo che

(prendiamo  $P_\varphi$  e  $P_\psi > 0$ )

$$\dot{\varphi} = \frac{P_\varphi - P_\psi \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta} = \frac{P_\varphi - P_\psi x}{I_1(1-x^2)}$$

Se  $\theta = \theta^* \rightarrow \dot{\varphi} = \omega_\varphi \Rightarrow \varphi(t) = \omega_\varphi t + \varphi_0$   
cost.

- $\dot{\varphi}$  si annulla in  $x_0 = P_\varphi/P_\psi$  con  $x_0 = \cos\theta_0$ .

inoltre: 
$$\begin{cases} \mu & x > x_0 \ (\theta < \theta_0) & \dot{\varphi}(\theta) < 0 \\ \mu & x < x_0 \ (\theta > \theta_0) & \dot{\varphi}(\theta) > 0 \end{cases}$$

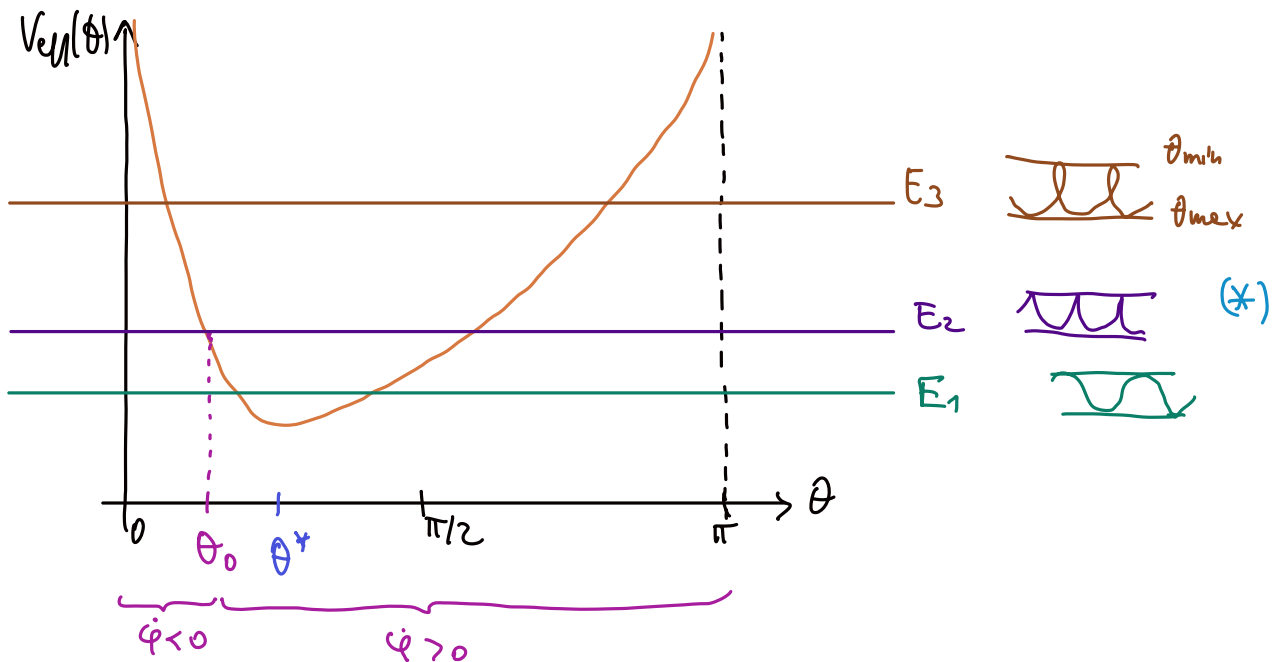
- Cerchiamo di capire dove si trova  $\theta_0$  rispetto al min  $\theta_*$ :

- Se  $\theta_0 < \theta_*$ , allora  $V_{eff}'(\theta_0) < 0$  ( $g'(x_0) > 0$ )

- Se  $\theta_0 > \theta_*$ , allora  $V_{eff}'(\theta_0) > 0$  ( $g'(x_0) < 0$ )

Valutiamo allora  $g'(x) = 1 + \frac{(P_\psi - x P_\varphi)}{I_1 \mu (1-x^2)} \left[ -P_\psi + x \frac{(P_\varphi - x P_\psi)}{(1-x^2)} \right]$  in  $x_0 = P_\varphi/P_\psi$ :

$$g'(x_0) = 1 + 0 > 0 \Rightarrow \theta_0 < \theta_*$$



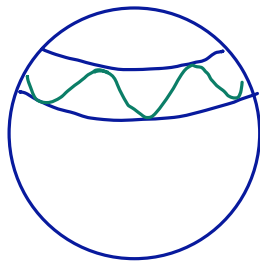
(\*) In questo caso  $\theta_0$  è pto in cui sia  $\dot{\theta}$  che  $\dot{\varphi}$  si annullano.

Possiamo rappresentare i tre casi  $E_1, E_2, E_3$  come moti sulla sfera:

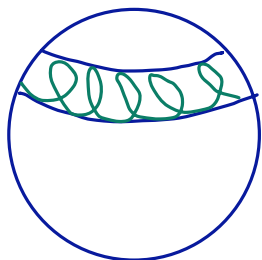
$E_1$ ) Per  $\theta$  permessi,  $\dot{\varphi}$  ha segno definito ( $\forall t$ ). Infatti si può dimostrare che

$$P_{\varphi} > P_{\varphi} \cdot \max_{\theta} |\cos \theta|$$

$\rightarrow \dot{\varphi}(t)$  avanza sempre



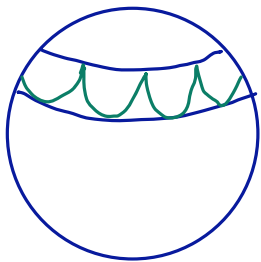
$E_3$ )  $\dot{\varphi}$  si annulla quando  $\cos \theta_0 = P_{\varphi} / P_{\varphi}$



$\hookrightarrow \dot{\varphi}$  ha segno opposto per  $\theta_{\min}$  e  $\theta_{\max}$

Dal grafico di  $v_{\varphi}$ , si vede che per la maggior parte dei valori di  $\theta$  permessi,  $\dot{\varphi}$  è positivo  $\rightarrow$  indicazione che la media temporale di  $\dot{\varphi}(t)$  è positiva e quindi le frottole avanzano.

$E_2$ ) In questo caso  $\theta_0 = \theta_{\min}$  (punto più alto toccato dalla frottole), cioè avviene  $P_{\varphi} = P_{\varphi} \cos \theta_0$ .



Questo caso è il più comune in pratica, quando si cerca di avere alto valore di  $\dot{\varphi}_0$  e invece  $\dot{\varphi}_0, \dot{\theta}_0 \ll 1$ .

Come sono legate le cost. del moto coi dati iniziali?

$$1) P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = I_3 \omega_3$$

$$2) P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \dot{\varphi} \cos^2 \theta + I_3 \dot{\psi} \cos \theta$$

$$= I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + P_\psi \cos \theta$$

$$3) E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta + \frac{(P_\varphi - \cos \theta P_\psi)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta}$$

Dati iniziali:  $\theta_0, \varphi_0, \psi_0, \dot{\theta}_0, \dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_0$

→ quando posizioniamo la trottole in poi lasciarla andare, abbiamo dati iniziali con  $\dot{\varphi}_0 = 0$  e  $\dot{\theta}_0 = 0$  ← ricadiamo nel caso  $E_2$

$$\Rightarrow \dot{\psi}_0 = \frac{P_\psi}{I_3} \quad (\text{da 1})$$

$$\cos \theta_0 = \frac{P_\varphi}{P_\psi} \quad (\text{da 2})$$

← questa relazione non vale sempre (solo nel caso  $E_2$ )  
 →  $E, P_\psi, P_\varphi$  in generale sono cost. del moto indipendenti

← lo abbiamo con nome  $\theta_0$  prefissi e proprio pto in cui  $\dot{\varphi}_0 = 0$



$$P_\psi = I_3 \dot{\psi}_0$$

$$P_\varphi = I_3 \dot{\varphi}_0 \cos \theta_0 = P_\psi \cos \theta_0$$

$$\Rightarrow P_\varphi P_\psi = I_3^2 \dot{\varphi}_0^2 \cos \theta_0$$

>  $I_1 mgl$  per  $\dot{\varphi}_0$  suff. grande

Nota:  $\varphi_0$  e  $\psi_0$  sono irrilevanti (conseguenza delle simmetrie del sistema).

# TROTTOLA DORMIENTE E RISVEGLIO

Osservazione: la trottola, dopo essere stata lanciata, si stabilizza con l'asse di rotazione verticale e ruota mostrando piccolissime oscillazioni: la rotazione è praticamente stationaria ("trottola dormiente"). Ad un certo punto la trottola si risveglia, cominciando un moto di nutazione e precessione sempre più accentuato, finché la trottola cade.

Vediamo come poterlo prevedere.

- Con un lancio ben fatto  $\alpha \dot{\theta}_0 = 0$  e  $\dot{\psi}_0 \gg \dot{\phi}_0, \dot{\theta}_0 \Rightarrow P_\phi \approx P_\psi$

- Quando  $P_\phi = P_\psi$ ,  $V_{eff}$  non esplosa più a  $\theta = 0$ :

$$V_{eff} = mgl \cos\theta + \frac{P_\phi^2 (1 - \cos\theta)^2}{2I_1 (1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)}$$
$$= mgl \cos\theta + \frac{P_\phi^2}{2I_1} \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$$

- Troviamo il minimo:

$$V_{eff}'(\theta) = -mgl \sin\theta + \frac{P_\phi^2}{2I_1} \left( \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{(1 - \cos\theta) \sin\theta}{(1 + \cos\theta)^2} \right) =$$
$$= \sin\theta \left[ -mgl + \frac{P_\phi^2}{I_1} \frac{1}{(1 + \cos\theta)^2} \right]$$

$\Rightarrow \theta = 0$  è pto di equilibrio, assieme a  $\theta^*$  con

$$\downarrow \quad \cos\theta^* = \frac{P_\phi - 1}{\sqrt{mglI_1}}$$
$$V_{eff}(0) = mgl$$

Controlliamo quale delle configurazioni è stabile

$$V_{eff}''(\theta) = \cos\theta \left[ -mgl + \frac{P_\phi^2}{I_1} \frac{1}{(1 + \cos\theta)^2} \right] + \sin\theta (\dots)$$
$$\rightarrow V_{eff}''(0) = -mgl + \frac{P_\phi^2}{4I_1}$$

$$P_\phi = I_3 \dot{\psi}_0 \cos\theta$$

Ricordiamo  $P_\phi = I_3 \dot{\psi}_0 \cos\theta_0 \leadsto$  se  $\dot{\psi}_0$  è suff. grande,  $V_{eff}''(0) > 0 \rightarrow$  PTO STAB.

Quindi:

- Se partiamo da  $\theta$  vicino a  $\theta=0$ ,  $\theta$  oscilla attorno allo zero con frequenza  $V''_{eff}(0) \rightsquigarrow$  frottola ha moto periodico stazionario: le piccole oscillazioni vengono smorzate dall'attrito.

- Man mano che passa il tempo, l'attrito riduce  $\dot{\psi}$  e quindi  $P_{\psi} = P_{\psi}$ , finché  $\theta=0$  non è più stabile: ogni perturbazione allontana la frottola dalla rotazione stazionaria (ora instabile)

→ compare un moto di nutazione che diventa sempre più ampio mentre  $P_{\psi}$  diminuisce (la frottola si è risvegliata)

## TROTTOLA CON SPIN ( $P_{\psi}$ ) MOLTO GRANDE

Ora lanciamo la frottola con condizioni iniziali ( $t=0$ ):

$\theta(0) = \theta_0$     $\dot{\theta}_0 = \dot{\psi}_0 = 0$    e    $\psi_0$  molto grande

$\theta_0$  qui sta per  $\theta(t)$  al tempo  $t=0$ ; può coincidere anche con angolo  $\mu$  cui  $\dot{\psi}=0$

Ricordiamo

$$\frac{I_1 \dot{x}^2}{2} = (E - mglx)(1-x^2) + \frac{1}{2I_1} (P_{\psi} - xP_{\psi})^2 \quad (*)$$

e valutiamole a  $t=0$ :

$$0 = (E - mglx_0)(1-x_0^2) + \frac{1}{2I_1} (P_{\psi} - x_0P_{\psi})^2$$

→  $x_0$  è una soluzione di qta equazione cubica.

Possiamo riscrivere (\*) come

$$E = \underbrace{\frac{I_1 \dot{x}^2}{2}}_{(A)} + mglx + \underbrace{\frac{(P_{\psi} - xP_{\psi})^2}{2I_1(1-x^2)}}_{(B)}$$

• A  $t=0$     $A=0$    e    $B=0 \rightsquigarrow E = mgl \cos \theta_0$

• A e B sono DEFINITI POSITIVI

Siccome l'energia si conserva, all'aumentare del tempo  
 si accendono i termini A e B e  $mg \cos \theta$  deve diminuire  
 $\Rightarrow \theta$  aumenta (trottola scende), cioè  $\theta_0$  corrisponde alla  
 circonferenza superiore

Inoltre, ricordando  $\dot{\varphi} = \frac{P_{\varphi} - P_{\psi} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$ , si ha

$$- \cos \theta_0 = P_{\varphi} / P_{\psi} \quad (\text{da } \dot{\varphi}_0 = 0)$$

$$E_1 = mg l \cos \theta_0 + \frac{P_{\psi}^2}{2I_3}$$

$$- \cos \theta_0 = \frac{E}{mgl} \quad (\text{da } E = mgl \cos \theta_0)$$

Usando quanto detto finora, risolviamo (\*) con  $\dot{x} = 0$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= mgl(x_0 - x)(1 - x^2) - \frac{P_{\psi}^2}{2I_1}(x_0 - x)^2 = \\
 &= (x_0 - x) \left( mgl(1 - x^2) - \frac{P_{\psi}^2}{2I_1}(x_0 - x) \right)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} 0 &= mgl(x_0 - x)(1 - x^2) - \frac{P_{\psi}^2}{2I_1}(x_0 - x)^2 = \\ &= (x_0 - x) \left( mgl(1 - x^2) - \frac{P_{\psi}^2}{2I_1}(x_0 - x) \right) \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{Qta equazione ci dà} \\
 \text{i PUNTI DI INVERSIONE} \\
 (\dot{x} = 0)
 \end{array}$$

altre radici sono soluzioni di qta eq. di 2° grado

$$mgl(x - x_0) \left( x^2 - kx - 1 + kx_0 \right) = 0 \quad k \equiv \frac{P_{\psi}^2}{2I_1 mgl} \gg 1$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ k \pm \sqrt{k^2 + 4 - 4kx_0} \right] =$$

$$= \frac{k}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{k^2} - \frac{4x_0}{k}} \right] \approx \begin{array}{l} \text{espandiamo fino al secondo ordine} \\ \sqrt{1+\epsilon} \sim 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots \end{array}$$

$$\approx \frac{k}{2} \left[ 1 \pm \left( 1 + \frac{2}{k^2} - \frac{2x_0}{k} - \frac{16x_0^2}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \right) \right]$$

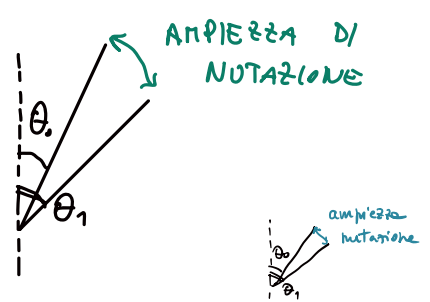
$$= \frac{k}{2} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{2x_0}{k} + \frac{2}{k^2}(1 - x_0^2) \right) \right] \quad k - x_0 + \dots \gg 1 \quad (\text{esclusa})$$

$$= \begin{cases} k - x_0 + \dots \gg 1 & (\text{ESCLUSA perché } |x| \leq 1) \\ x_0 - \left( \frac{1 - x_0^2}{k} \right) + \dots \approx \cos \theta_0 - \frac{\sin^2 \theta_0}{k} \equiv x_1 \end{cases}$$

L'eq. diventa  $mgL(x-x_0)(x-x_1)(x-k+x_0) = 0$ .

Le due soluzioni accettabili sono

$$x_0 = \cos\theta_0 \quad e \quad x_1 = \cos\theta_0 - \frac{\text{sen}^2\theta_0}{K}$$



↳ L'AMPIEZZA DELLA NOTAZIONE è

$$x_0 - x_1 = \frac{\text{sen}^2\theta_0}{K} \Rightarrow$$

Tanto più la trottoia gira veloce ( $K$  grande), tanto minore (e quindi meno visibile) è l'ampiezza della notazione

Nota: il pto di equilibrio del potenziale efficace sarà fra  $\theta_0$  e  $\theta_1$ .

Ora ricaviamo la FREQUENZA DELLA NOTAZIONE:

• partiamo da  $\frac{I_1 \dot{x}^2}{2} = (E - mgLx)(1-x^2) - \frac{1}{2I_1} (P_\psi - xP_\psi)^2$ , il cui membro di destra può essere riscritto come (a);

• siccome  $x_0 \approx x_1$ , possiamo approssimare

$$\frac{I_1 \dot{x}^2}{2} = - \underbrace{KmgL}_{P_\psi^2 / 2I_1} (x-x_0)^2$$

• deriviamo ambo i membri rispetto al tempo:

$$I_1 \dot{x} \ddot{x} = - \frac{P_\psi^2}{I_1} (x-x_0) \dot{x} \rightsquigarrow \ddot{x} = - \underbrace{\left(\frac{P_\psi}{I_1}\right)^2}_{=\omega^2 \gg 1} (x-x_0) \approx - \left(\frac{P_\psi}{I_1}\right)^2 \left(x - \frac{x_0+x_1}{2}\right)$$

↑  
centro di intervalli di oscillazione

$$\hookrightarrow x(t) = \frac{x_0+x_1}{2} + \frac{x_0-x_1}{2} \cos \omega t$$

$$\frac{P_\psi}{P_\psi} = \cos\theta_0$$

Infine consideriamo la PRECESSIONE

$$\dot{\varphi} = \frac{P_\psi - \cos\theta P_\psi}{I_1 \text{sen}^2\theta} = \frac{P_\psi}{I_1} \frac{(x_0-x)}{1-x^2} \approx \frac{P_\psi}{I_1} \frac{x_0-x}{\text{sen}^2\theta_0} \approx \frac{P_\psi}{I_1 \text{sen}^2\theta_0} \cdot \left(\frac{x_0-x_1}{2}\right) (1-\cos\omega t)$$

$\sim 1/P_\psi \ll 1 \Rightarrow \dot{\varphi}$  media è PICCOLA

$$* : x - \frac{x_0+x_1}{2} = \frac{x_0-x_1}{2} \cos(\omega t) \Rightarrow x_0-x = \frac{x_0-x_1}{2} (1-\cos\omega t)$$

Extra: vediamo il caso particolare in cui  $P_\psi P_\phi = I, mgl$

Quando questo avviene, il minimo di  $V_{eff}$  è a  $\theta = \pi/2$  ( $x=0$ )

$$g(x) = x + \frac{(P_\psi - x P_\phi)^2}{2P_\psi P_\phi (1-x^2)} = \frac{P_\psi^2 - 2x P_\psi P_\phi + x^2 P_\phi^2 + 2x P_\psi P_\phi - 2x^3 P_\psi P_\phi}{2P_\psi P_\phi (1-x^2)}$$

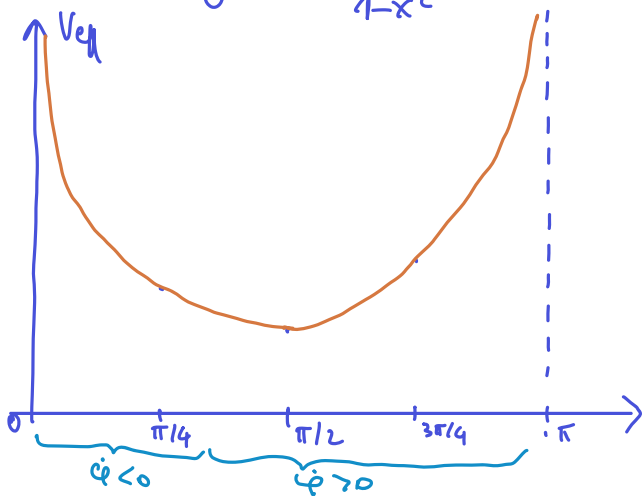
$$= \tilde{g}(x) - \frac{x^3}{1-x^2}$$

$$\text{con } \tilde{g}(x) = \frac{P_\psi^2 + x^2 P_\phi^2}{2P_\psi P_\phi (1-x^2)} \quad \text{funz. pari in } x \rightarrow -x$$

$$g(0) = \frac{P_\psi}{2P_\phi}$$

$$g(1/2) = \tilde{g}(1/2) - 1/6 \quad (\theta = \pi/4)$$

$$g(-1/2) = \tilde{g}(-1/2) + 1/6 \quad (\theta = 3\pi/4)$$



In questo caso  $\theta_0 < \theta^*$ . Il potenziale non è simmetrico e la regione di  $\theta$  in cui  $\dot{\phi} > 0$  è più estesa di quella in cui  $\dot{\phi} < 0$ . In media la frottola si muove con  $\dot{\phi}_{media} > 0$ .

Extra: Caso  $P_\psi = 0$  ( $P_\psi < I_1 mgl$ )

$\vec{N}_i$

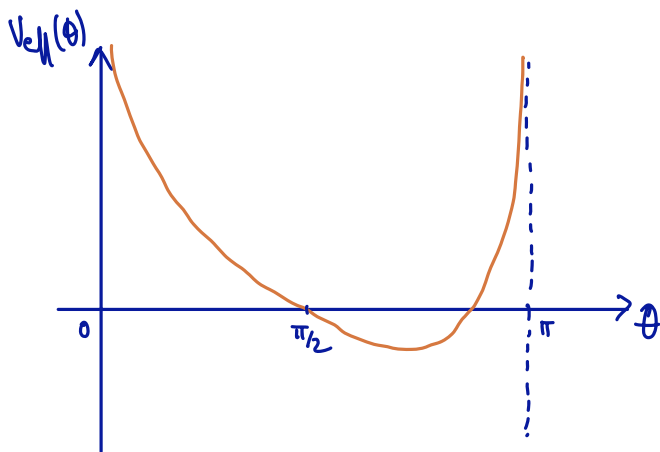
Qto può essere ottenuto mettendo la trottola inizialmente in posizione orizzontale  $\theta = \pi/2$   $\psi > 0 \rightarrow P_\psi > 0$

Il potenziale diventa

$$V(x) = mgl \left( x + \frac{x^2 P_\psi^2}{2I_1 mgl (1-x^2)} \right) = mgl x \left( 1 + \frac{P_\psi^2}{2I_1 mgl} \frac{x}{1-x^2} \right)$$

Esso ha due zeri:

$$x=0 \quad (\theta = \frac{\pi}{2}) \quad \text{e} \quad x = \tilde{x} < 0 \quad (\theta > \pi/2)$$



- Affinchè il minimo coincida con  $\pi/2$ , bisogna prendere il limite  $P_\psi^2 \gg 2I_1 mgl$ , per cui avremo uno zero doppio, cioè un minimo.
- Ma qto limite vuol dire sostanzialmente spegnere la gravità.

Extra (da riguardare a fine corso):

HAMILTONIANA delle trottole.

Hamiltoniana delle trottole:  $H = P_\theta \dot{\theta} + P_\psi \dot{\psi} + P_\varphi \dot{\varphi} - L$

$$H = \frac{P_\theta^2}{2I_1} + \frac{P_\psi^2}{2I_3} + \frac{(P_\varphi - \cos\theta P_\psi)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + mgl \cos\theta$$

Si vede immediatamente che il sistema è integrabile:

$H, P_\psi, P_\varphi$  sono 3 cost. del moto in involuzione.

$\{M_3, M_2\} = 0$   $M_2$  è comb. lin. di  $M_{1,2,3}$  (quindi sembrerebbe impossibile che commutano, us!)  
con  
coeff. che dipendono dalle coordinate libere

Extra: espressioni utili durante la trattazione delle trottole:

$$P_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta = P_\psi / I_3$$

$$P_\varphi = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + P_\psi \cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{P_\varphi - P_\psi \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}$$

$$E = \underbrace{\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + mgl \cos\theta + \frac{(P_\varphi - P_\psi \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta}}_{V_{eff}(\theta)} \Leftrightarrow \frac{I_1}{2} \dot{x}^2 = (E - mglx)(1-x^2) - \frac{1}{2I_1} (P_\varphi - x P_\psi)^2$$