

Foglio 4

Esercizio 1

- (i) Dimostrare che l'equazione $y(e^y + x) - \log(x) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \eta(x)$ intorno a $(x_0, y_0) = (1, 0)$ tale che $y_0 = \eta(x_0)$; calcolare le derivate $\eta'(x_0)$ e $\eta''(x_0)$.
- (ii) Dimostrare che l'equazione $xy^2 + z^3 - xy + 2z$ definisce implicitamente una funzione $z = \eta(x, y)$ intorno a $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ tale che $z_0 = \eta(x_0, y_0)$; calcolare $\nabla\eta(x_0, y_0)$.
- (iii) Dimostrare che l'equazione $\log(xy) + z(|x| - y) + w^2 + z^2 - 1 = 0$ definisce implicitamente una funzione $z = \eta(x, y, w)$ intorno a $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (1, 1, 1, 0)$ tale che $z_0 = \eta(x_0, y_0, w_0)$; calcolare $\nabla\eta(x_0, y_0, w_0)$. È possibile invece esplicitare w in funzione delle altre variabili? Se sì, nell'intorno di quali punti?
- (iv) Dimostrare che il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + zve^x - 2 = 0 \\ xe^z + ye^v - z + v = 0 \end{cases}$$

definisce implicitamente una funzione $(z(x, y), v(x, y))$ in un intorno di $(x_0, y_0, z_0, v_0) = (0, 0, 1, 1)$ tale che $(z_0, v_0) = (z(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$; calcolare la matrice jacobiana di tale funzione in (x_0, y_0) .

- (v) Dimostrare che il sistema

$$\begin{cases} x + y + z + v = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = 36 \end{cases}$$

definisce implicitamente una funzione $(y(x), z(x), v(x))$ in un intorno di $(x_0, y_0, z_0, v_0) = (3, 2, 1, 0)$ tale che $(y_0, z_0, v_0) = (y(x_0), z(x_0), v(x_0))$. Calcolarne la derivata in x_0 , ossia il vettore $(y'(x_0), z'(x_0), v'(x_0))$, e la derivata seconda, ossia il vettore $(y''(x_0), z''(x_0), v''(x_0))$.

Esercizio 2

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} x + \log y + 5z - 10 = 0 \\ 2x + y^2 + 3z^3 - 25 = 0 \end{cases}$$

di cui $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$ è soluzione.

Stabilire quali coppie di variabili è possibile esplicitare rispetto alla terza. Dopo aver verificato che questo è possibile per la coppia (y, z) , scrivere il polinomio di Taylor al second'ordine per le funzioni $y(x)$ e $z(x)$ centrato in $x_0 = 0$.

Esercizio 3 Sia $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Discutere l'invertibilità locale di F e mostrare in particolare che F è localmente invertibile in un intorno di $(1, 1)$. Scrivere la matrice jacobiana nel punto $H(1, 1)$ dell'inversa locale.

Esercizio 4 Sia $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ (si osservi incidentalmente che, identificando $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ e scrivendo $z = x + iy$, si ha $F(z) = e^z$). Mostrare che F è localmente invertibile intorno a ogni punto, ma non è globalmente invertibile.

Esercizio 5 Siano $U \subseteq \mathbf{R}^n$ e $V \subseteq \mathbf{R}^m$ aperti, e $F: U \rightarrow V$ un diffeomorfismo. Dimostrare che $n = m$ (la dimensione è cioè invariante per diffeomorfismo).

Esercizio 6 Si consideri l'equazione di quinto grado $x^5 + x + u = 0$, dove u è un parametro reale. Come è noto, non esiste una formula in radicali che fornisce le radici di tale equazione. Si osservi tuttavia che, per $u = 0$, si ha la radice $x = 0$. Dimostrare che risulta definita in un intorno di $u_0 = 0$ in \mathbf{R} una funzione η di classe \mathcal{C}^1 tale che $\eta(0) = 0$ e $x = \eta(u)$ risolve l'equazione data. Scrivere inoltre il polinomio di Taylor di η al terz'ordine e usarlo per stimare numericamente le soluzioni delle equazioni $x^5 + x + 0.1 = 0$ e $x^5 + x + 0.5 = 0$.

Esercizio 7 Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ e sia $H: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$H(x, y) = (f(x), -y + xf(x)).$$

- (i) Mostrare che H è localmente invertibile intorno ad ogni punto (x_0, y_0) tale che $f'(x_0) \neq 0$.
- (ii) Verificare che, sotto le condizioni del punto precedente, l'inversa locale G di H ha la forma

$$G(u, v) = (g(u), -v + ug(u))$$

per un'opportuna funzione $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Esercizio 8 Si considerino la funzione f e l'insieme E nei seguenti casi:

- (i) $f(x, y) = xy^3$, $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x^2 + 4y^2 - 1 = 0\}$;
- (ii) $f(x, y) = x^3 - y^3$, $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x^4 + y^4 - 1 = 0\}$;
- (iii) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
- (iv) $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3: x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$;
- (v) $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$, $E = \{x \in \mathbf{R}^n: x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$;
- (vi) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2: x^2 + y^2 + 7z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.

In ciascun caso:

- (i) Dimostrare che f ammette massimo e minimo assoluti su E .
- (ii) Verificare che sono soddisfatte le ipotesi del teorema dei moltiplicatori di Lagrange.
- (iii) Determinare il massimo e il minimo di f su E .

Esercizio 9

- (i) Tra i cilindri circolari retti di area 1, qual è quello di volume massimo?
- (ii) Tra i parallelepipedi di volume 1, qual è quello di area minima?

Esercizio 10 Determinare i punti della superficie $S \in \mathbf{R}^3$ di equazione $z^2 - xy - 1 = 0$ che hanno distanza minima dall'origine (se esistono).

Esercizio 11

- (i) Determinare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = (x^2 + y + 1)e^{x-y}$ sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2: |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$.
- (ii) Determinare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = (x - 3y^2)^3$ sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.