

Analisi 2

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Matematica

a.a. 2025/2026

Nota. Questi appunti sono in evoluzione. Si prega di segnalare eventuali errori, per poterli correggere rapidamente. Le parti scritte in blu sono facoltative ai fini dell'esame.

Parte III - Serie

1 Introduzione e prime proprietà

Sia V uno spazio vettoriale normato. Data una successione $(a_k)_k$ in V , la “serie” associata è la successione $(s_n)_n$ definita da

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0, \\ s_1 &= a_0 + a_1, \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2, \\ &\dots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ &\dots \end{aligned}$$

L'elemento a_k è detto “termine k -esimo” della serie, mentre $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ è detta “somma parziale n -esima” della serie. Se $(s_n)_n$ ha un limite in V , si dice che la serie “converge”. In tal caso, il limite $S = \lim_n s_n$ è detto “somma della serie”, e scriveremo

$$S = \lim_n \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

o talvolta anche

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Tuttavia, per abuso di notazione, la serie $(s_n)_n$ stessa è spesso denotata con gli stessi simboli

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \text{o} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots$$

A volte, per brevità, scriveremo semplicemente $\sum_k a_k$.

Analizziamo tre esempi, con $V = \mathbb{R}$.

Esempio 1. Per $\alpha \in \mathbb{R}$, la “serie geometrica”

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n + \dots$$

ha come suo termine k -esimo $a_k = \alpha^k$. Se $\alpha \neq 1$, la somma parziale n -esima è

$$s_n = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1},$$

mentre se $\alpha = 1$, essa è $s_n = n + 1$. Quindi, la serie converge se e solo se $|\alpha| < 1$, nel qual caso la sua somma è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Si noti che se $\alpha \geq 1$ allora $\lim_n s_n = +\infty$, mentre se $\alpha \leq -1$ la successione $(s_n)_n$ non ha limite, poiché $\liminf_n s_n = -\infty$ e $\limsup_n s_n = +\infty$.

In generale, se la successione $(s_n)_n$ non ha limite, si dice che la serie è “indeterminata”. D'altra parte, per serie a valori reali, si dice che

- la serie “diverge a $+\infty$ ” se $\lim_n s_n = +\infty$,
- la serie “diverge a $-\infty$ ” se $\lim_n s_n = -\infty$.

Esempio 2. La “serie di Mengoli”

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \cdots$$

ha come termine k -esimo $a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. È una “serie telescopica”:

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots$$

Quindi, semplificando,

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+2},$$

il che mostra che $\lim_n s_n = 1$. Abbiamo così dimostrato che la serie converge e che la sua somma è pari a 1. Possiamo quindi scrivere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1.$$

Nell'esempio precedente, si potrebbero usare diverse notazioni nella somma come, ad esempio,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1,$$

o varianti di essa; inoltre, la lettera “ k ” potrebbe essere sostituita da una qualsiasi altra scrivendo, ad esempio, $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1$. Queste osservazioni, simili a quelle fatte per la sommatoria, si applicano a tutte le serie.

Esempio 3. La “serie armonica”

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots$$

ha come termine k -esimo $a_k = \frac{1}{k+1}$. Essa diverge a $+\infty$; possiamo vedere ciò scrivendola come

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots,$$

raggruppando insieme prima due dei suoi termini, poi quattro, poi otto, poi sedici, e così via, raddoppiandone il numero di volta in volta. È facile vedere che le somme comprese nelle parentesi sono tutte maggiori di $\frac{1}{2}$. Quindi, la successione delle somme parziali deve avere limite $+\infty$. Possiamo quindi scrivere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

Purtroppo è raro che si possa calcolare esplicitamente la somma di una serie. Molto spesso quindi saremo già soddisfatti nel dimostrare che una serie converge o non converge.

È importante notare che la convergenza di una serie non è compromessa se viene modificato solo un numero finito dei suoi termini. Infatti, se la serie converge, possiamo modificare, aggiungere o eliminare un numero finito di termini iniziali, e la nuova serie così ottenuta convergerà ancora. Al contrario, se la serie non converge perché è indeterminata, o diverge a $\pm\infty$, lo stesso sarà vero per la serie modificata.

Teorema 1 *Se una serie $\sum_k a_k$ converge, allora*

$$\lim_n a_n = 0.$$

Dimostrazione. Se $\lim_n s_n = S \in V$. Allora anche $\lim_n s_{n-1} = S$, e quindi

$$\lim_n a_n = \lim_n (s_n - s_{n-1}) = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = S - S = 0,$$

che è quanto volevasi dimostrare. ■

Studiamo il comportamento delle serie rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare.

Teorema 2 *Si supponga che le due serie $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ convergano con somme A e B , rispettivamente. Allora anche la serie $\sum_k (a_k + b_k)$ converge, e la sua somma è $A + B$. Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato, anche la serie $\sum_k (\alpha a_k)$ converge, e la sua somma è αA . Scriveremo brevemente*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Dimostrazione. Siano $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ e $s'_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Allora,

$$s_n + s'_n = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k), \quad \alpha s_n = \sum_{k=0}^n (\alpha a_k),$$

e il risultato si ottiene passando ai limiti. ■

Vediamo come il Criterio di Cauchy si adatta alle serie negli spazi di Banach.

Teorema 3 *Se V è uno spazio di Banach, la serie $\sum_k a_k$ converge se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=m+1}^n a_k \right\| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Essendo V è completo, la successione $(s_n)_n$ ha un limite in V se e solo se è una successione di Cauchy, cioè,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad [m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}] \quad \Rightarrow \quad \|s_n - s_m\| < \varepsilon.$$

Ora non è restrittivo prendere $n > m$, e sostituendo $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ e $s_m = \sum_{k=0}^m a_k$ si ha la conclusione. ■

Ora enunciamo un utile criterio di convergenza.

Teorema 4 *Se V è uno spazio di Banach e la serie $\sum_k \|a_k\|$ converge, allora anche la serie $\sum_k a_k$ converge.*

In tal caso si dice che la serie $\sum_k a_k$ “converge in norma” e, nel caso in cui V coincida con \mathbb{R} o con \mathbb{C} , si dice che la serie “converge assolutamente”.

Dimostrazione. Assumiamo che la serie $\sum_k \|a_k\|$ converga. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per il Criterio di Cauchy, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > m \geq \bar{n} \Rightarrow \sum_{k=m+1}^n \|a_k\| < \varepsilon.$$

Siccome

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n a_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|a_k\|,$$

abbiamo che

$$n > m \geq \bar{n} \Rightarrow \left\| \sum_{k=m+1}^n a_k \right\| < \varepsilon,$$

e si arriva alla conclusione usando di nuovo il Criterio di Cauchy. ■

La convergenza in norma di una serie rafforza così l'interesse nello studiare il comportamento delle serie di numeri reali positivi.

2 Serie di numeri reali - I

In questa sezione consideriamo solo serie con termini a_k in \mathbb{R} .

Se per ogni k si ha $a_k \geq 0$, allora la successione $(s_n)_n$ è crescente, quindi ha un limite e abbiamo solo due possibilità: o la serie converge, oppure diverge a $+\infty$.

Il seguente **Criterio di Confronto** sarà molto utile.

Teorema 5 *Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie per cui*

$$\exists \bar{k} \in \mathbb{N} : k \geq \bar{k} \Rightarrow 0 \leq a_k \leq b_k.$$

Possiamo affermare che:

- a) *se $\sum_k b_k$ converge, allora anche $\sum_k a_k$ converge;*
- b) *se $\sum_k a_k$ diverge, allora anche $\sum_k b_k$ diverge.*

Dimostrazione. Definiamo

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad s'_n = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Come detto in precedenza, possiamo modificare un numero finito di termini nelle due serie e supporre senza perdita di generalità che sia $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni k . Allora le due successioni $(s_n)_n$ e $(s'_n)_n$ sono crescenti, e $s_n \leq s'_n$, per ogni n . Di conseguenza, i limiti $S = \lim_n s_n$ e $S' = \lim_n s'_n$ esistono, e $S \leq S' \leq +\infty$. Se $\sum_k b_k$ converge, allora $S' \in \mathbb{R}$, quindi anche $S \in \mathbb{R}$, il che significa che $\sum_k a_k$ anch'essa converge. Se $\sum_k a_k$ diverge, allora $S = +\infty$, quindi anche $S' = +\infty$, ossia $\sum_k b_k$ anch'essa diverge. ■

Esempio. La serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots$$

converge. Questo può essere dimostrato confrontandola con la serie

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots,$$

che è una leggera modifica di quella già trattata nell'Esempio 2 sopra. Tutti i termini della prima serie sono minori o uguali ai corrispondenti della seconda serie, che sappiamo convergere.

Come primo corollario, abbiamo il **Criterio del Confronto Asintotico**.

Corollario 6 Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi, per le quali esiste il limite

$$\ell = \lim_k \frac{a_k}{b_k}.$$

Abbiamo tre casi con diverse conclusioni:

- a) $\ell \in]0, +\infty[$; le due serie o convergono entrambe o divergono entrambe;
- b) $\ell = 0$; se $\sum_k b_k$ converge, allora anche $\sum_k a_k$ converge;
- c) $\ell = +\infty$; se $\sum_k b_k$ diverge, allora anche $\sum_k a_k$ diverge.

Dimostrazione. Caso a). Se $\ell \in]0, +\infty[$, esiste un \bar{k} tale che

$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3\ell}{2},$$

cioè,

$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad a_k \leq \frac{3\ell}{2} b_k \quad \text{e} \quad b_k \leq \frac{2}{\ell} a_k.$$

La conclusione segue quindi dal Criterio di Confronto.

Caso b). Se $\ell = 0$, esiste un \bar{k} tale che, se $k \geq \bar{k}$, allora $a_k \leq b_k$, e si applica il Criterio di Confronto.

Caso c). Se $\ell = +\infty$ abbiamo l'analogo del secondo caso, con i ruoli di a_k e b_k invertiti. ■

3 Liminf e limsup

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali. Per ogni coppia di numeri naturali n, ℓ , definiamo

$$\alpha_{n,\ell} = \min\{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+\ell}\}, \quad \beta_{n,\ell} = \max\{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+\ell}\}.$$

Se manteniamo fisso n , la successione $(\alpha_{n,\ell})_\ell$ è decrescente, e la successione $(\beta_{n,\ell})_\ell$ è crescente, per cui i seguenti limiti esistono:

$$\bar{\alpha}_n = \lim_{\ell} \alpha_{n,\ell} = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}, \quad \bar{\beta}_n = \lim_{\ell} \beta_{n,\ell} = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$

Notiamo che $\bar{\alpha}_n$ potrebbe essere uguale a $-\infty$, e $\bar{\beta}_n$ potrebbe essere uguale a $+\infty$. Inoltre,

$$\bar{\alpha}_n \leq a_n \leq \bar{\beta}_n, \quad \text{per ogni } n.$$

Ora, la successione $(\bar{\alpha}_n)_n$ è o costantemente uguale a $-\infty$, oppure ha valori reali ed è crescente; similmente, la successione $(\bar{\beta}_n)_n$ è o costantemente uguale a $+\infty$, oppure ha valori reali ed è decrescente. Possiamo quindi definire il “limite inferiore” e il “limite superiore” di $(a_n)_n$ come

$$\liminf_n a_n = \lim_n \bar{\alpha}_n, \quad \limsup_n a_n = \lim_n \bar{\beta}_n.$$

Vediamo come può essere caratterizzato il limite inferiore. Abbiamo tre casi:

$$\liminf_n a_n = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} i) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \Rightarrow a_n > \ell - \varepsilon \\ ii) \forall \varepsilon > 0, a_n < \ell + \varepsilon \text{ per infiniti valori di } n. \end{cases}$$

$$\liminf_n a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{R}, a_n < \beta \text{ per infiniti valori di } n.$$

$$\liminf_n a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \Rightarrow a_n > \alpha.$$

Notiamo che quest'ultimo caso è equivalente a $\lim_n a_n = +\infty$.

Analogamente, per il limite superiore abbiamo tre casi:

$$\limsup_n a_n = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} i) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \Rightarrow a_n < \ell + \varepsilon \\ ii) \forall \varepsilon > 0, a_n > \ell - \varepsilon \text{ per infiniti valori di } n. \end{cases}$$

$$\limsup_n a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, a_n > \alpha \text{ per infiniti valori di } n.$$

$$\limsup_n a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \Rightarrow a_n < \beta.$$

Quest'ultimo caso è equivalente a $\lim_n a_n = -\infty$.

Il vantaggio di considerare i limiti inferiore e superiore è che essi esistono sempre, mentre il limite, come sappiamo, potrebbe non esistere. Il seguente teorema spiega meglio questa situazione.

Teorema 7 *La successione $(a_n)_n$ ha un limite (possibilmente uguale a $-\infty$ o $+\infty$) se e solo se $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n$; in tal caso, questo valore coincide con $\lim_n a_n$.*

Dimostrazione. È una conseguenza diretta delle caratterizzazioni sopra descritte. Evitiamo di scrivere i dettagli, per brevità. ■

La seguente proprietà sarà utile.

Proposizione 8 *Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali positivi. Allora,*

$$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'ultima disuguaglianza. Sia $\ell = \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se $\ell = +\infty$, non c'è nulla da dimostrare. Quindi, supponiamo $\ell < +\infty$, e notiamo che sicuramente $\ell \geq 0$. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Allora, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} a_{\bar{n}+1} &< \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) a_{\bar{n}}, \\ a_{\bar{n}+2} &< \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) a_{\bar{n}+1} < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 a_{\bar{n}}, \\ a_{\bar{n}+3} &< \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) a_{\bar{n}+2} < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^3 a_{\bar{n}}, \\ &\dots \end{aligned}$$

e può essere così dimostrato per induzione che

$$n \geq \bar{n} + 1 \quad \Rightarrow \quad a_n < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \frac{a_{\bar{n}}}{\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\bar{n}}}.$$

Poiché per ogni $\alpha > 0$ si ha che $\lim_n \sqrt[n]{\alpha} = 1$, esiste un $\tilde{n} \geq \bar{n} + 1$ tale che

$$n \geq \tilde{n} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\bar{n}}}} < \ell + \varepsilon.$$

Abbiamo così dimostrato che $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \ell$.

La prima disuguaglianza può essere dimostrata in modo simile. ■

4 Serie di numeri reali - II

Il seguente corollario ci fornisce il **Criterio della Radice**.

Corollario 9 Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini non negativi. Se

$$\limsup_k \sqrt[k]{a_k} < 1.$$

allora la serie converge.

Dimostrazione. Sia $\ell = \limsup_k \sqrt[k]{a_k}$ e sia $\alpha \in]\ell, 1[$ un numero fissato arbitrariamente. Allora, esiste un \bar{k} tale che

$$k \geq \bar{k} \Rightarrow \sqrt[k]{a_k} \leq \alpha,$$

cioè

$$k \geq \bar{k} \Rightarrow a_k \leq \alpha^k.$$

La conclusione segue per confronto con la serie geometrica $\sum_k \alpha^k$, che converge, poiché $0 < \alpha < 1$. ■

Richiamando la Proposizione 8, come conseguenza immediata abbiamo il **Criterio del rapporto**.

Corollario 10 Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini positivi. Se

$$\limsup_k \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

allora la serie converge.

Presentiamo ora il **Criterio di Condensazione**, che abbiamo già implicitamente utilizzato trattando la serie armonica dell'Esempio 3.

Teorema 11 Sia $(a_k)_k$ una successione decrescente di numeri non negativi. Allora le due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

o convergono entrambe o divergono entrambe.

Dimostrazione. Per semplicità eliminiamo il primo termine a_0 dalla prima serie. Supponiamo che la serie $\sum_k 2^k a_{2^k}$ converga. Allora,

$$\begin{aligned} a_1 + (a_2 + a_3) &\leq a_1 + 2a_2, \\ a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4, \\ a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \\ &+ (a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}) \leq \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8, \\ &\dots \end{aligned}$$

portando alla disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} a_k \leq \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Per confronto, siccome $\sum_k 2^k a_{2^k}$ converge, anche $\sum_k a_k$ converge.

Viceversa, supponiamo ora che la serie $\sum_k a_k$ converga. Allora,

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &\leq 2(a_1 + a_2), \\ a_1 + 2a_2 + 4a_4 &\leq 2(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4)), \\ a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 &\leq 2(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8)), \\ &\dots \end{aligned}$$

portando a

$$\sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{2^n} 2a_k, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Per confronto, siccome $\sum_k 2a_k$ converge, anche $\sum_k 2^k a_{2^k}$ converge. ■

Esempio 1. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta},$$

dove $\beta > 0$ è un numero reale fissato. La successione $(a_k)_k$, con $a_k = 1/k^\beta$, è decrescente. La “serie condensata”,

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-\beta})^k,$$

è una serie geometrica del tipo $\sum_k \alpha^k$, con $\alpha = 2^{1-\beta}$. Converge se e solo se $|\alpha| < 1$; quindi,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta} \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > 1.$$

Esempio 2. Studiamo ora la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\beta},$$

per qualche $\beta > 0$. Facendo uso del calcolo differenziale si verifica facilmente che la successione $(a_k)_k$, con $a_k = 1/k(\ln k)^\beta$, è decrescente. La “serie condensata” è

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\ln 2^k)^\beta} = \frac{1}{(\ln 2)^\beta} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\beta}.$$

Ricordando l'esempio precedente, concludiamo che

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > 1.$$

Finora in questa sezione abbiamo considerato solo serie a termini non negativi. Adesso studieremo una serie a termini con segni alterni. Consideriamo una serie del tipo

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots,$$

dove tutti gli a_k sono positivi. Ecco il **Criterio di Leibniz**.

Teorema 12 *Se $(a_k)_k$ è una successione decrescente di numeri positivi e*

$$\lim_k a_k = 0,$$

allora la serie $\sum_k (-1)^k a_k$ converge.

Dimostrazione. Sia

$$s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n,$$

e consideriamo la successione $(s_n)_n$ delle somme parziali. La dividiamo in due sottosuccessioni, una con indici pari e l'altra con indici dispari. Poiché $(a_k)_k$ è positiva e decrescente, vediamo che

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq s_7 \leq \cdots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0.$$

Pertanto, la sottosuccessione $(s_{2m+1})_m$, quella con indici dispari, è crescente e limitata superiormente, mentre la sottosuccessione $(s_{2m})_m$, quella con indici pari, è decrescente e limitata inferiormente. Quindi, entrambe le sottosuccessioni hanno un limite finito, e possiamo scrivere

$$\lim_m s_{2m+1} = \ell_1, \quad \lim_m s_{2m} = \ell_2.$$

D'altra parte,

$$\ell_2 - \ell_1 = \lim_m (s_{2m} - s_{2m+1}) = \lim_m a_{2m+1} = 0,$$

quindi $\ell_1 = \ell_2$. Avendo le due sottosuccessioni $(s_{2m+1})_m$ e $(s_{2m})_m$ lo stesso limite, possiamo essere certi che la successione $(s_n)_n$ avrà anch'essa lo stesso limite. ■

5 Serie di numeri complessi

Quando consideriamo una serie $\sum_k a_k$ i cui termini sono numeri complessi $a_k = x_k + iy_k$, dove $x_k = \Re(a_k)$ e $y_k = \Im(a_k)$, possiamo scrivere le somme parziali come

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (x_k + iy_k) = \sum_{k=0}^n x_k + i \sum_{k=0}^n y_k = \sigma_n + i\tau_n,$$

dove $\sigma_n = \Re(s_n)$ e $\tau_n = \Im(s_n)$. Abbiamo quindi una successione $(\sigma_n, \tau_n)_n$ in \mathbb{R}^2 . Ricordando che una tale successione ha un limite in \mathbb{R}^2 se e solo se entrambe le sue componenti hanno un limite in \mathbb{R} , otteniamo il seguente enunciato.

Teorema 13 *Se $a_k = x_k + iy_k$, con x_k e y_k numeri reali, la serie $\sum_k a_k$ converge se e solo se entrambe le serie $\sum_k x_k$ e $\sum_k y_k$ convergono. In tal caso,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + i \sum_{k=0}^{\infty} y_k.$$

Esempio. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k+1} = 1 + \frac{i}{2} - \frac{1}{3} - \frac{i}{4} + \frac{1}{5} + \frac{i}{6} - \frac{1}{7} - \frac{i}{8} + \dots + \frac{i^n}{n+1} + \dots$$

La parte reale è

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

mentre la parte immaginaria è

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

Entrambe convergono per il Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni, quindi anche la serie data converge.

Da notare che, nell'esempio precedente, la serie non converge assolutamente, poiché

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{j^k}{k+1} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

è la serie armonica, che sappiamo essere divergente.

Introduciamo ora il “prodotto di Cauchy” di due serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Esso è definito dalla serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j \right).$$

È necessario tuttavia prestare attenzione alla sua convergenza. Infatti, non è vero in generale che se le due serie convergono, allora anche la loro serie prodotto di Cauchy converge. Il teorema seguente afferma che ciò sarà vero se almeno una delle due serie converge assolutamente.

Teorema 14 (Teorema di Mertens) *Supponiamo che le serie $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ convergano, con somme rispettivamente A e B . Se almeno una delle due serie converge assolutamente, allora la serie prodotto di Cauchy converge con somma AB .*

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converga assolutamente, e poniamo $\bar{A} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$. Indichiamo con

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j$$

il termine k -esimo della serie prodotto di Cauchy. Siano

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad s'_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad s''_n = \sum_{k=0}^n c_k.$$

Definiamo inoltre $r'_n = B - s'_n$. Allora

$$\begin{aligned} s''_n &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + \cdots + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n) \\ &= a_0 s'_n + a_1 s'_{n-1} + \cdots + a_{n-1} s'_1 + a_n s'_0 \\ &= a_0 (B - r'_n) + a_1 (B - r'_{n-1}) + \cdots + a_{n-1} (B - r'_1) + a_n (B - r'_0) \\ &= s_n B - (a_0 r'_n + a_1 r'_{n-1} + \cdots + a_{n-1} r'_1 + a_n r'_0). \end{aligned}$$

Siccome $\lim_n s_n B = AB$, la dimostrazione sarà completa se

$$\lim_n (a_0 r'_n + a_1 r'_{n-1} + \cdots + a_{n-1} r'_1 + a_n r'_0) = 0.$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Usando il fatto che $\lim_n r'_n = 0$, possiamo trovare un \bar{n}_1 tale che

$$n \geq \bar{n}_1 \quad \Rightarrow \quad |r'_n| < \varepsilon.$$

Poniamo $\bar{R} = \max\{|r'_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Per il Criterio di Cauchy, esiste un $\bar{n}_2 \geq \bar{n}_1$ tale che

$$n \geq \bar{n}_2 \quad \Rightarrow \quad |a_{n-\bar{n}_1+1}| + |a_{n-\bar{n}_1+2}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon.$$

Allora, se $n \geq \bar{n}_2$,

$$\begin{aligned} |a_0 r'_n + a_1 r'_{n-1} + \cdots + a_{n-1} r'_1 + a_n r'_0| &\leq \\ &\leq |a_0| |r'_n| + \cdots + |a_{n-\bar{n}_1}| |r'_{\bar{n}_1}| + |a_{n-\bar{n}_1+1}| |r'_{\bar{n}_1-1}| + \cdots + |a_n| |r'_0| \\ &\leq \varepsilon(|a_0| + \cdots + |a_{n-\bar{n}_1}|) + \bar{R}(|a_{n-\bar{n}_1+1}| + \cdots + |a_n|) \\ &\leq \varepsilon \bar{A} + \bar{R} \varepsilon = (\bar{A} + \bar{R}) \varepsilon, \end{aligned}$$

completando così la dimostrazione. ■

6 Serie di funzioni

Siano E uno spazio metrico e F uno spazio vettoriale normato. Se abbiamo una successione di funzioni $f_k : E \rightarrow F$, per ogni $x \in E$ possiamo chiederci se la serie $\sum_k f_k(x)$ converge o meno. Se esiste un sottoinsieme $U \subseteq E$ e una funzione $f : U \rightarrow F$ tale che

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{per ogni } x \in U,$$

diciamo che la serie “converge puntualmente” a f su U ; ciò accade quando, ponendo $s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$, la successione $(s_n)_n$ converge puntualmente a f su U . Diciamo che la serie “converge uniformemente” a f su U se la convergenza di $(s_n)_n$ a f è uniforme su U , cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall x \in U \quad n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right\| < \varepsilon.$$

Teorema 15 *Se ogni funzione $f_k : E \rightarrow F$ è continua su $U \subseteq E$ e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a f su U , allora anche f è continua su U .*

Dimostrazione. È una conseguenza diretta dell’analogo teorema sulle successioni di funzioni. ■

Teorema 16 Siano E un compatto, F uno spazio di Banach, e supponiamo che tutte le funzioni $f_k : E \rightarrow F$ siano continue. Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$ converge, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a una funzione continua su E .

Dimostrazione. Sappiamo che $V = \mathcal{C}(E, F)$ è uno spazio di Banach, e $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ è una serie in V che converge in norma. Quindi, converge in V , il che significa che converge uniformemente. ■

Esempio. Siano $E = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ e consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(e^{3kx-1} + \arctan(x^2 + \sqrt{k})).$$

Studiamo la serie delle norme in $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Abbiamo che

$$\sup \left\{ \left| \frac{1}{k^2} \sin(e^{3kx-1} + \arctan(x^2 + \sqrt{k})) \right| : x \in [a, b] \right\} \leq \frac{1}{k^2},$$

e la serie $\sum_k \frac{1}{k^2}$ converge. Quindi la serie converge in norma, pertanto anche uniformemente.

Adattiamo ora i due teoremi visti precedentemente al contesto delle serie.

Teorema 17 Sia $(f_k)_k$ una successione in $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ tale che la serie $\sum_k f_k$ è uniformemente convergente. Allora,

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(t) dt.$$

Dimostrazione. È una conseguenza diretta del teorema sul passaggio al limite sotto segno di integrale, quando applicato alla successione di funzioni $(s_n)_n$. ■

Teorema 18 Sia $(f_k)_k$ una successione in $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Supponiamo che la serie $\sum_k f_k$ e la serie delle derivate $\sum_k f'_k$ convergano uniformemente a delle funzioni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, rispettivamente. Allora, f è di classe \mathcal{C}^1 , e $f' = g$. Di conseguenza, possiamo scrivere

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x).$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Allora, $(s_n)_n$ è in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, e $s'_n = \sum_{k=0}^n f'_k$. Per ipotesi, $\lim_n s_n = f$ e $\lim_n s'_n = g$ uniformemente su I . Quindi, per il teorema sullo scambio limite-derivata, deve essere che $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ e $f' = g$. ■

Iterando lo stesso argomento, possiamo facilmente generalizzare il precedente teorema.

Teorema 19 Sia $(f_k)_k$ una successione in $\mathcal{C}^m([a, b], \mathbb{R})$. Supponiamo che le serie

$$\sum_k f_k, \quad \sum_k f'_k, \quad \sum_k f''_k, \quad \dots, \quad \sum_k f_k^{(m)}$$

convergono tutte uniformemente su $[a, b]$ a delle funzioni f, g_1, g_2, \dots, g_m , rispettivamente. Allora, f è di classe \mathcal{C}^m , e

$$f' = g_1, \quad f'' = g_2, \quad \dots, \quad f^{(m)} = g_m.$$

6.1 Serie di potenze

Un esempio importante di serie di funzioni è fornito dalle “serie di potenze”

$$(PS)_{\mathbb{C}} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

i cui termini sono funzioni $f_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definite da $f_k(z) = a_k z^k$, per opportuni coefficienti $a_k \in \mathbb{C}$. Analizziamo dapprima la convergenza puntuale di una tale serie.

Teorema 20 Ponendo

$$L = \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|},$$

abbiamo le seguenti possibilità:

- a) se $L = +\infty$, la serie $(PS)_{\mathbb{C}}$ converge solo per $z = 0$;
- b) se $L = 0$, la serie $(PS)_{\mathbb{C}}$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$;
- c) se $L \in]0, +\infty[$, la serie $(PS)_{\mathbb{C}}$ $\begin{cases} \text{converge se } |z| < \frac{1}{L}, \\ \text{non converge se } |z| > \frac{1}{L}. \end{cases}$

Dimostrazione. Se $L = +\infty$ e $z \neq 0$, allora $\sqrt[k]{|a_k|} > \frac{1}{|z|}$ per infiniti valori di k , quindi

$$|a_k z^k| = (\sqrt[k]{|a_k|} |z|)^k > 1, \quad \text{per infiniti valori di } k.$$

Se la serie dovesse convergere, allora dovrebbe essere $\lim_k a_k z^k = 0$, ma non è così. Quindi, se $L = +\infty$, la serie converge solo per $z = 0$.

Se $L = 0$, per ogni $z \in \mathbb{C}$ abbiamo che

$$\limsup_k \sqrt[k]{|a_k z^k|} = |z| \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = 0,$$

quindi la serie converge assolutamente, per il Criterio della Radice.

Assumiamo ora $L \in]0, +\infty[$. Se $|z| < \frac{1}{L}$, allora

$$\limsup_k \sqrt[k]{|a_k z^k|} = |z| \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = |z| L < 1,$$

e la serie converge assolutamente, per il Criterio della Radice. Al contrario, se $|z| > \frac{1}{L}$, ossia $L > \frac{1}{|z|}$, allora $\sqrt[k]{|a_k|} > \frac{1}{|z|}$ per infiniti valori di k , quindi

$$|a_k z^k| = (\sqrt[k]{|a_k|} |z|)^k > 1, \quad \text{per infiniti valori di } k.$$

Se la serie dovesse convergere, allora dovremmo avere che $\lim_k a_k z^k = 0$, ma non è così. ■

Definiamo il “raggio di convergenza” r della serie $(PS)_{\mathbb{C}}$ come segue:

$$r = \begin{cases} 0 & \text{se } L = +\infty, \\ +\infty & \text{se } L = 0, \\ \frac{1}{L} & \text{se } L \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

Se $r > 0$, diremo che $B(0, r)$ è il “disco di convergenza” della serie. Sottolineiamo che esso è una palla aperta. Se $r = +\infty$, poniamo $B(0, r) = \mathbb{C}$.

Se $r > 0$, la serie $(PS)_{\mathbb{C}}$ converge puntualmente in $B(0, r)$. Tuttavia, questa convergenza potrebbe non essere uniforme. Vediamo ora che la convergenza sarà uniforme su qualsiasi disco più piccolo.

Teorema 21 *Supponiamo che sia $r > 0$. Allora, per ogni $\rho \in]0, r[$ la serie $(PS)_{\mathbb{C}}$ converge in norma, quindi uniformemente, su $\overline{B}(0, \rho)$.*

Dimostrazione. Sia $\rho \in]0, r[$ fissato. Allora,

$$\sup\{|a_k z^k| : |z| \leq \rho\} = |a_k| \rho^k,$$

e poiché

$$\limsup_k \sqrt[k]{|a_k| \rho^k} = \rho \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = \rho L < r L = 1,$$

la serie $\sum_k |a_k| \rho^k$ converge, per il criterio della radice. Abbiamo così dimostrato che la serie $(PS)_{\mathbb{C}}$ converge in norma su $\overline{B}(0, \rho)$. ■

Corollario 22 Se $r > 0$ e $f : B(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ è definita da

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

allora f è continua su $B(0, r)$.

Dimostrazione. Dal teorema precedente, per ogni $\rho \in]0, r[$ la convergenza è uniforme su $\overline{B}(0, \rho)$, quindi f è continua su $\overline{B}(0, \rho)$. Essendo $\rho \in]0, r[$ arbitrario, f è dunque continua in ogni punto di $B(0, r)$. ■

Remark 23 La precedente teoria può essere facilmente adattata a serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

dove $z_0 \in \mathbb{C}$ è un punto fissato. (In effetti, il cambio di variabile $u = z - z_0$ ci riporta al caso considerato precedentemente.) Il disco di convergenza, in questo caso, è $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

6.2 La funzione esponenziale complessa

Studiamo ora, per ogni $z \in \mathbb{C}$, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Si tratta di una serie di potenze, che converge assolutamente, poiché

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z^k}{k!} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|}.$$

È quindi possibile definire una funzione $\mathcal{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ in questo modo:

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Ricordiamo che, se $z = x \in \mathbb{R}$, allora $\mathcal{F}(x)$ coincide con $\exp(x)$, ossia

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Possiamo quindi interpretare questa funzione \mathcal{F} come un'estensione della funzione esponenziale al piano complesso \mathbb{C} . Per questo motivo, chiameremo \mathcal{F} la “funzione esponenziale complessa”, e scriveremo $\exp(z)$ o e^z al posto di $\mathcal{F}(z)$.

Teorema 24 Per ogni z_1 e z_2 in \mathbb{C} si ha che

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2).$$

Dimostrazione. Le serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}$ convergono assolutamente, e le loro somme sono $\exp(z_1)$ e $\exp(z_2)$, rispettivamente. Quindi, per il Teorema di Mertens 14, la serie prodotto di Cauchy converge, e la sua somma è $\exp(z_1) \exp(z_2)$. D'altra parte, la serie prodotto di Cauchy è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \frac{z_1^{k-j}}{(k-j)!} \frac{z_2^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z_1^{k-j} z_2^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!},$$

(abbiamo usato la Formula del Binomio) e la sua somma è $\exp(z_1 + z_2)$, da cui la conclusione. \blacksquare

Scrivendo $z = x + iy$, otteniamo

$$\exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy).$$

Inoltre,

$$\exp(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \lim_n q_n(y),$$

dove

$$\begin{aligned} q_n(y) &= \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i \frac{y^7}{7!} + \cdots + i^n \frac{y^n}{n!}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che

$$q_n(y) = q_n^{(1)}(y) + i q_n^{(2)}(y),$$

dove

$$q_n^{(1)}(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots + (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!}$$

se $n = 2m$ oppure $n = 2m + 1$, mentre

$$q_n^{(2)}(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots + (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

se $n = 2m + 1$ oppure $n = 2m + 2$. Siccome

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n^{(1)}(y) = \cos y, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n^{(2)}(y) = \sin y,$$

concludiamo che

$$\lim_n q_n(y) = \left(\lim_n q_n^{(1)}(y), \lim_n q_n^{(2)}(y) \right) = (\cos y, \sin y),$$

quindi

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Questa è la **Formula di Eulero**.

Si può facilmente verificare che

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Queste formule possono essere utilizzate per estendere le funzioni \cos e \sin al campo complesso, semplicemente considerando $t \in \mathbb{C}$. Le funzioni iperboliche possono anch'esse essere estese a \mathbb{C} , mediante le formule

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Notiamo che

$$\cos t = \cosh(it), \quad \sin t = -i \sinh(it).$$

A questo punto si capisce bene lo stretto legame tra le funzioni trigonometriche e le funzioni iperboliche.

6.3 Serie di Taylor

Consideriamo ora la serie di potenze

$$(PS)_{\mathbb{R}} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e tutti i coefficienti a_k sono anch'essi numeri reali. Stiamo quindi considerando la serie $\sum_k f_k$, dove le funzioni $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono definite da $f_k(x) = a_k x^k$. Pertanto, se $r > 0$, il disco di convergenza $B(0, r)$ risulta ora ridotto all'intervallo $] -r, r[$ e, se $r = +\infty$, esso coincide con l'intera retta reale \mathbb{R} . In questi casi, ci si potrebbe chiedere se la somma della serie $(PS)_{\mathbb{R}}$ sia derivabile su $] -r, r[$.

Teorema 25 *Sia $r > 0$ il raggio di convergenza della serie $(PS)_{\mathbb{R}}$, e sia*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \text{per ogni } x \in] -r, r[.$$

Allora, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza r . Inoltre, la funzione $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile, e

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \text{per ogni } x \in]-r, r[.$$

Dimostrazione. Essendo

$$\limsup_k \sqrt[k]{|k a_k|} = \lim_k \sqrt[k]{k} \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|},$$

vediamo che il raggio di convergenza per la serie $\sum_k k a_k x^{k-1}$ è uguale a r . Possiamo quindi definire la nuova funzione $g :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ come $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$. Per ogni $\rho \in]0, r[$, sappiamo che la convergenza della serie è uniforme su $[-\rho, \rho]$.

Ponendo $f_k(x) = a_k x^k$, abbiamo che $f = \sum_k f_k$ e $g = \sum_k f'_k$, la convergenza essendo uniforme su $[-\rho, \rho]$. Per il Teorema 18, f è derivabile su $[-\rho, \rho]$ e $f'(x) = g(x)$, per ogni $x \in [-\rho, \rho]$. La conclusione segue, poiché $\rho \in]0, r[$ è arbitrario. ■

Iterando lo stesso argomento e facendo uso del Teorema 19 si ottiene facilmente la seguente generalizzazione.

Teorema 26 Sia $r > 0$ il raggio di convergenza della serie $(PS)_{\mathbb{R}}$, e sia

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \text{per ogni } x \in]-r, r[.$$

Allora, le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}, \quad \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3}, \quad \dots,$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-m+1) a_k x^{k-m}, \quad \dots$$

hanno tutte lo stesso raggio di convergenza r . Inoltre, la funzione $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ è infinitamente derivabile e, per ogni intero positivo j ,

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-j+1) a_k x^{k-j}, \quad \text{per ogni } x \in]-r, r[.$$

Osserviamo ora che, prendendo $x = 0$ nella formula precedente, otteniamo

$$f^{(j)}(0) = j! a_j,$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$ (ricordando che $f^{(0)} = f$). Ecco allora che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k.$$

Questa è la “serie di Taylor” associata alla funzione f in $x_0 = 0$. Abbiamo quindi dimostrato che qualsiasi serie di potenze con raggio di convergenza positivo r definisce una funzione f che è analitica su $] -r, r[$.

Remark 27 *Riferendosi al Remark 23, possiamo estendere le considerazioni fatte per la serie $(PS)_{\mathbb{R}}$ anche alle serie di potenze del tipo*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto fissato. Se il raggio di convergenza r è positivo, il disco di convergenza è $]x_0 - r, x_0 + r[$ e la funzione $f :]x_0 - r, x_0 + r[\rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla somma della serie può essere scritta come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k,$$

cioè, $f(x) = \lim_n p_n(x)$, dove $p_n(x)$ è il polinomio di Taylor.

6.4 Serie di Fourier

Consideriamo ora i “polinomi trigonometrici” con un periodo fissato $T > 0$. Essi sono definiti dalla formula

$$f_n(t) = c_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right),$$

dove c_0 , a_k e b_k sono costanti reali. Siamo interessati a studiare la convergenza della successione di funzioni $(f_n)_n$.

Teorema 28 *Se esiste una funzione $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_n f_n(t) = f(t) \quad \text{uniformemente su } [0, T],$$

allora necessariamente

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \\a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt, \\b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt.\end{aligned}$$

Dimostrazione. Per il Teorema 17,

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) dt &= \int_0^T \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right) \right) dt \\&= c_0 T + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right) dt = c_0 T,\end{aligned}$$

da cui segue la formula per c_0 . Analogamente, per ogni intero $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt &= \int_0^T \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right) \right) \cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt \\&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right) \cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt.\end{aligned}$$

D'altra parte, integrando per parti due volte, vediamo che per ogni intero positivo $k \neq j$,

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt = 0, \quad \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt = 0,$$

mentre se $k = j$,

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt = 0, \quad \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt = \frac{T}{2}.$$

Pertanto,

$$\int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt = \frac{T}{2} a_j,$$

da cui si ottiene la formula per a_j . Analogamente si può vedere che

$$\int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt = \frac{T}{2} b_j,$$

che ci fornisce la formula per b_j . ■

Per ogni funzione continua $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo i suoi “coefficienti di Fourier”

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt,$$

e la sua “serie di Fourier”

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right).$$

Il problema è: questa serie converge per ogni $t \in [0, T]$?

La risposta è, in generale, negativa: esistono funzioni continue $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ per le quali la serie di Fourier non converge in alcuni punti $t \in [0, T]$. Tuttavia, ci sono molti modi per superare questa difficoltà. Ne vedremo rapidamente alcuni.

Definiamo le somme parziali della serie di Fourier come

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right).$$

Possiamo ora introdurre le “medie di Cesàro”

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1} [f_0(t) + f_1(t) + \cdots + f_n(t)],$$

per poter enunciare, senza dimostrazione, quanto segue.

Teorema 29 (Teorema di Fejer) *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e periodica di periodo T , allora*

$$\lim_n \sigma_n(t) = f(t), \quad \text{uniformemente su } \mathbb{R}.$$

Eccone una conseguenza diretta.

Corollario 30 *Siano $f, \tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue e periodiche di periodo T . Se i rispettivi coefficienti di Fourier sono tali che $a_k = \tilde{a}_k$ e $b_k = \tilde{b}_k$ per ogni k , allora f e \tilde{f} coincidono.*

Dimostrazione. Con le notazioni adattate a questa situazione, avremo che $\sigma_n(t) = \tilde{\sigma}_n(t)$, per ogni n , quindi

$$f(t) - \tilde{f}(t) = \lim_n (\sigma_n(t) - \tilde{\sigma}_n(t)) = 0,$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. ■

Potremmo anche definire i “coefficienti di Fourier complessi”

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt,$$

per $k \in \mathbb{Z}$. Ponendo $b_0 = 0$, vediamo che

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{se } k < 0, \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{se } k \geq 0, \end{cases}$$

così che

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t}.$$

Nel seguito, usiamo la notazione

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-n}^n \sigma_k \right).$$

Corollario 31 *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo T . Se la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ converge, allora*

$$\lim_n f_n(t) = f(t), \quad \text{uniformemente su } \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\left| c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} \right| = |c_k|.$$

Pertanto, se la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ converge, per il Teorema 16 la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente a qualche funzione continua $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, che è periodica di periodo T . D'altra parte, per questa funzione,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{f}(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_n(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=-n}^n c_j e^{i\frac{2\pi j}{T}t} e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \frac{1}{T} \int_0^T c_j e^{i\frac{2\pi(j-k)}{T}t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T c_k dt = c_k, \end{aligned}$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Per il Corollario 30, le due funzioni f e \tilde{f} coincidono, per cui la dimostrazione è completa. ■

Nel seguente teorema, la funzione f potrebbe essere discontinua in alcuni punti.

Teorema 32 (Teorema di Dirichlet) *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo T . Si supponga che ci siano un numero finito di punti $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$, con*

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T,$$

tali che f è derivabile con continuità su ogni intervallo $]t_{j-1}, t_j[$, con $j = 1, 2, \dots, N$. Nei punti t_j (dove la funzione potrebbe non essere continua, oppure, se continua, potrebbe non essere derivabile), esistano e siano finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{s \rightarrow t_j^-} f(s), \quad \lim_{s \rightarrow t_j^+} f(s), \quad \lim_{s \rightarrow t_j^-} f'(s), \quad \lim_{s \rightarrow t_j^+} f'(s).$$

Allora, per ogni $t \in [0, T]$,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{s \rightarrow t^-} f(s) + \lim_{s \rightarrow t^+} f(s) \right).$$

Inoltre, la convergenza è uniforme su ogni intervallo compatto su cui f è continua.

Osserviamo che, se f è continua in t , allora

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(\lim_{s \rightarrow t^-} f(s) + \lim_{s \rightarrow t^+} f(s) \right).$$

Per le dimostrazioni dei Teoremi 29 e 32, si rimanda al libro di Körner [4].

Forniamo ora due esempi di applicazioni del teorema precedente.

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica definita da

$$f(t) = t, \quad \text{se } t \in [-\pi, \pi[.$$

Si verifica facilmente che le ipotesi del Teorema di Dirichlet sono soddisfatte. Calcoliamo

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0,$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(kt) dt = 0,$$

poiché $t \mapsto t \cos(kt)$ è una funzione dispari; inoltre, integrando per parti,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-t \frac{\cos(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kt)}{k} dt \right) = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi affermare che

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt), \quad \text{per ogni } t \in]-\pi, \pi[.$$

Come caso particolare, prendendo $t = \frac{\pi}{2}$, otteniamo la bella formula

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Esempio 2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica definita da

$$f(t) = t^2, \quad \text{se } t \in [-\pi, \pi[.$$

Si vede subito che sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Dirichlet. Calcoliamo

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3},$$

e, integrando per parti,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(kt) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[t^2 \frac{\sin(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t \frac{\sin(kt)}{k} dt \right) = -\frac{2}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt) dt = \\ &= -\frac{2}{\pi k} \left(\left[-t \frac{\cos(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kt)}{k} dt \right) = \frac{4(-1)^k}{k^2}. \end{aligned}$$

D'altronde,

$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(kt) dt = 0,$$

poiché $t \mapsto t^2 \sin(kt)$ è una funzione dispari. Essendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, possiamo quindi affermare che

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos(kt), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Concentriamoci su due casi interessanti. Se $t = \pi$, otteniamo la formula

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

che ci dà

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

d'altra parte, se $t = 0$, abbiamo

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2},$$

che ci fornisce la formula

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

7 Serie e integrali

Ora dimostriamo un teorema che evidenzia lo stretto legame tra la teoria delle serie numeriche e quella dell'integrale.

Teorema 33 *Sia $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva, decrescente e integrabile su $[1, c]$, per ogni $c > 1$. Allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge se e solo se f è integrabile su $[1, +\infty[$. Inoltre, si ha*

$$\int_1^{+\infty} f \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f.$$

Dimostrazione. Per $x \in [k, k+1]$ si ha che $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, quindi

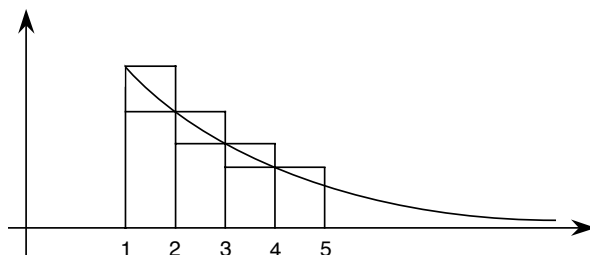
$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k).$$

Sommando, otteniamo

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

Essendo f positiva, la successione $(\sum_{k=1}^n f(k))_n$ e la funzione $c \mapsto \int_1^c f$ sono entrambe crescenti e quindi hanno un limite per $n, c \rightarrow +\infty$. La conclusione segue ora dal teorema di confronto per i limiti. ■

Dovrebbe essere chiaro che la scelta del punto di partenza $a = 1$ sia per l'integrale che per la serie non è in alcun modo obbligata.



Esempio. Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$; in questo caso,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx,$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2}.$$

Una maggiore accuratezza si ottiene calcolando la somma di alcuni termini iniziali e poi utilizzando la stima fornita dall'integrale. Per esempio, separando i primi due termini, abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{8} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3},$$

con

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{27} + \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx.$$

Si dimostra così che

$$\frac{255}{216} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{263}{216}.$$