Geometria 3 - Curve e superfici 2025/26
Foglio di esercizi 6

Prof. Valentina Beorchia

15 aprile 2026

1. Sia $S = \{(x, y, z) | z = x^2 + ky^2\}$ con $k > 0$ (S è un paraboloide) e si fissi un orientazione (ovvero un campo di versori normali) di S. In $P = (0, 0, 0)$ si calcolino curvature e direzioni principali. Che tipo di punto è P?

2. Sia $S = \{(x, y, z) | z = xy\}$. Si determini $N(S)$, l'immagine della mappa di Gauss.

   Si calcolino, inoltre, curvature e direzioni principali nel punto $P = (0, 0, 0)$.

3. Sia S il grafico di una funzione differenziabile $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   Si esprima la mappa di Weintgarten in termini delle derivate prime e delle derivate seconde di f, si determini la matrice di tale mappa nella base del piano tangente indotta dalla parametrizzazione $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ e la si confronti con la matrice hessiana di f.

4. Si consideri una curva regolare $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ e una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ e mai nulla $w : I \to mR^3$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. La superficie regolare S data dalla parametrizzazione

   $$\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u, v) = \alpha(u) + v\, w(u)$$

   si chiama *superficie rigata*, la curva $\alpha(I)$ si dice *direttrice* e le rette affini $\alpha(u_0) + v\, w(u_0)$ per $u_0 \in I$ sono dette *generatrici*.

   Si determinino i coefficienti della prima forma fondamentale di S in un generico punto.