Foglio 6

Esercizio 1 Dimostrare le seguenti affermazioni.

(i) La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge se e solo se $q \in (-1, 1)$.

(ii) La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ converge se e solo se $\sigma > 1$.

(iii) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log(n))^\beta}$ converge se e solo se $\alpha > 1$, oppure se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

(iv) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha}{b^n}$ converge per ogni $\alpha > 0$ e $b > 1$.

Esercizio 2 Studiare la convergenza delle seguenti serie

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 3^n$;

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n}$;

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$;

(vi) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4+n}{2^n+n^4}$;

(vii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$;

(viii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

(ix) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+n^2+4}$;

(x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$;

(xi) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{\sqrt{n}}\right]$;

(xii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n n^n}$;

(xiii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3+\sqrt{n}}$;

(xiv) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)}$;

(xv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3-n}}$;

(xvi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\log n}{(n+\cos n)^3}$;

(xvii) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

(xviii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+e^{-n}}{2n^2+3}$;

(xix) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log n - \sqrt{n}}{5n^4-1}$;

(xx) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}} - e\right)$;

(xxi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(2+\sin(n))}{\sqrt{n}-\log n + n}$;

(xxii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}$;

(xxiii) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)$.

Esercizio 3 Discutere la convergenza delle seguenti serie al variare dei parametri reali x, b, α.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(x+\frac{b}{n}\right)\right]^n$ (*Suggerimento:* può essere utile supporre dapprima $|\sin(x)| \neq 1$ e poi trattare separatamente i casi in cui $|\sin(x)| = 1$);

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n^2 + \log n}{n^\alpha \log(n+1)} \Big)^{1/2}$.

Esercizio 4 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots .$$

(i) Stabilire per quali valori di $x \in \mathbf{R}$ essa converge, studiando in particolare i casi $x = \pm 1$.

(ii) Dimostrare che per $x \in (-1, 1)$ la serie converge a $\log(1 + x)$ (usare la formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange).

Esercizio 5 Sommando un'opportuna serie geometrica, scrivere sotto forma di frazione i numeri le cui rappresentazioni decimali periodiche sono $0,\overline{76}$ e $0,1\overline{2}$.

Esercizio 6 Stabilire se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-2n+1}}{3^{n-2}}$ converge e in tal caso calcolarne la somma.

Esercizio 7 Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ al variare di $x \in \mathbf{R}$ e calcolarne la somma dopo averne scritto il termine generale nella forma $\frac{A}{n+x} + \frac{B}{n+1+x}$ per due opportuni $A, B \in \mathbf{R}$ (si tratta cioè di una serie telescopica).

Esercizio 8 Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \log(n)}$, stabilire quanti termini occorre sommare per approssimarne la somma con errore inferiore a 10^{-k}, per $k \in \mathbf{N}$.

Esercizio 9 Sia c_n una successione di numeri reali positivi tali che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$. Dimostrare che esiste una successione crescente b_n con $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n \leq \infty.$$

Suggerimento: non è restrittivo supporre che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1$, e si può assumere dapprima che $c_n = \frac{1}{2^n}$. Il caso generale si può poi ricondurre a questo raggruppando opportunamente i termini.

Esercizio 10

(i) Dimostrare che le due serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x-n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$ non convergono per alcuna $x \in \mathbf{R}$.

(ii) Dimostrare che le due serie "regolarizzate" $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x-n} + \frac{1}{n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}$ convergono per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Siano $A_+(x)$ e $A_-(x)$ le rispettive somme.

(iii) Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \Big)$ converge per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ con somma pari a $A_+(x) + A_-(x)$. È possibile mostrare che tale somma è $\pi \cot(\pi x) - \frac{1}{x}$.