



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE**



Dipartimento di

Fisica

Dipartimento d'Eccellenza 2023-2027

SOLUZIONI DELLE ESERCITAZIONI DI TERMODINAMICA E FLUIDODINAMICA (E ONDE)

Esercitatore: dott. Davide Fuligno
a.a. 2025/26

Indice

1	TERMODINAMICA	1
1.1	Esercitazione 1 - 16 marzo 2026	1
1.2	Esercitazione 2 - 24 marzo 2026	4
1.3	Esercitazione 3 - 30 marzo 2026	7
1.4	Esercitazione 4 - 13 aprile 2026	12

1 TERMODINAMICA

1.1 Esercitazione 1 - 16 marzo 2026

1. a) Partendo dall'equazione di stato dei gas perfetti, l'unico parametro non noto nello stato iniziale risulta essere il numero di moli.

$$p_0 V_0 = nRT_0 \rightarrow n = \frac{p_0 V_0}{RT_0}$$

Usando i valori forniti (opportunamente convertiti) si ha:

$$n = \frac{1 \text{ atm} \times 2 \text{ L}}{0.0821 \text{ L} \cdot \text{atm} / (\text{mol} \cdot \text{K}) \times 300 \text{ K}} = \frac{101300 \text{ Pa} \times 0.002 \text{ m}^3}{8.3145 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K}) \times 300 \text{ K}} = 0.081 \text{ mol}$$

- b) La trasformazione è quasi-statica a pressione costante. Il lavoro compiuto dal gas può quindi essere calcolato come

$$L = p_0 \Delta V = p_0 (V_1 - V_0) = 101300 \text{ Pa} \times 0.0005 \text{ m}^3 = 51 \text{ J}$$

- c) Per determinare il calore assorbito è necessario utilizzare il primo principio della termodinamica. Trattandosi di un gas monoatomico, dalla teoria cinetica dei gas, sappiamo che la variazione di energia interna dipende solo dalla variazione di temperatura. Calcoliamo quindi la temperatura nello stato finale:

$$T_1 = \frac{p_0 V_1}{nR} = \frac{101300 \text{ Pa} \times 0.0025 \text{ m}^3}{0.081 \text{ mol} \times 8.3145 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K})} = 376 \text{ K} = 103^\circ \text{C}$$

Da cui $\Delta T = 76 \text{ K}$.

Quindi la differenza di energia interna è

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR \Delta T = 1.5 \times 0.081 \text{ mol} \times 8.3145 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K}) \times 76 \text{ K} = 76 \text{ J}$$

Quindi dal primo principio $\Delta U = Q - L$ si ricava il calore assorbito:

$$Q = \Delta U + L = (51 + 76) \text{ J} = 1.3 \cdot 10^2 \text{ J}$$

2. a) Poiché la molla è in condizione di equilibrio, la risultante delle forze agenti su di essa è nulla. La forza esterna applicata sul pistone 1 sarà quindi uguale alla forza applicata dal gas sul pistone 2, ottenibile moltiplicando la pressione del gas per la superficie del pistone. Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava quindi la pressione del gas:

$$p_A = nR \frac{T_A}{V_A} = 2 \text{ atm}$$

E conseguentemente la forza esercitata dal gas avrà modulo

$$f = p_A S = 8.11 \times 10^3 \text{ N}$$

La forza esterna avrà lo stesso modulo è quindi $F = f = 8.11 \times 10^3 \text{ N}$. Questo stesso ragionamento vale anche considerando le forze applicate a un estremo della molla, quindi anche la forza elastica esercitata dalla molla avrà un valore in modulo pari a f . Si può quindi calcolare la compressione della molla come

$$\Delta x = f/k = 0.101 \text{ m}$$

- b) Il lavoro L è stato speso in parte per comprimere la molla da Δx a $\Delta x + d_1 - d_2$. La parte restante L_A invece è servita per comprimere il gas:

$$L_A = L - \frac{1}{2}k[(\Delta x + d_1 - d_2)^2 - (\Delta x)^2] = 345 \text{ J}$$

Per il gas la trasformazione è una trasformazione adiabatica irreversibile, quindi non c'è trasferimento di calore e dal primo principio sappiamo che $\Delta U = L$ (il segno positivo è perché stiamo considerando la forza subita dal gas durante la trasformazione e non quella esercitata dallo stesso, che è uguale ma con segno opposto). Inoltre trattandosi di un gas monoatomico, dalla teoria cinetica dei gas sappiamo che la variazione di energia interna dipende solo dalla variazione di temperatura, quindi possiamo ricavare la temperatura finale:

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_A^* - T_A) = L_A \rightarrow T_A^* = T_A + \frac{L_A}{\frac{3}{2}nR} = 301 \text{ K}$$

Invece il volume finale del gas è $V_A^* = V_A - d_2 S = 9.2 \text{ L}$ e quindi la pressione finale risulta di

$$P_A^* = \frac{nRT_A^*}{V_A^*} = 2.7 \text{ atm}$$

3. a) Prima di aprire il rubinetto, i due gas occupano lo stesso volume iniziale V_0 e si trovano alla stessa pressione p_0 . Dall'equazione di stato dei gas perfetti possiamo quindi ricavare il rapporto fra il numero di moli dei due gas, che poi useremo per ricavare il rapporto in massa.

$$p_0 V_0 = n_1 R T_1 \qquad p_0 V_0 = n_2 R T_2$$

$$\rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

Indicando ora con M_1 e M_2 i pesi molecolari dei due gas e con m_1 ed m_2 le loro masse, abbiamo che:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1 M_1}{n_2 M_2} = \frac{M_1}{M_2} \frac{T_2}{T_1} = 1.22$$

- b) Prima di trovare la temperatura di equilibrio dobbiamo capire cosa succede dopo aver aperto il rubinetto. I due gas si espandono rapidamente e adiabaticamente e senza che venga eseguito lavoro. Dal primo principio abbiamo quindi una situazione in cui $Q = 0$ e $L = 0$ e quindi anche $\Delta U = 0$. Dalla teoria cinetica sappiamo che $U \propto T$ e quindi quando i due gas si espandono la loro temperatura rimane costante. Dopo l'espansione ciascuno dei due gas occupa un volume $2V_0$ doppio rispetto a quello iniziale, ed essendo rimasto alla stessa temperatura sappiamo che ha una pressione $p_0/2$ dimezzata rispetto a quella iniziale. Ora possiamo considerare il trasferimento di calore dal gas caldo a quello freddo fino a raggiungere la temperatura di equilibrio. I due gas non compiono lavoro, quindi la variazione di energia interna di ciascuna dei due sarà uguale al calore scambiato fra i due gas.

Per trovare la temperatura di equilibrio è quindi sufficiente eguagliare il calore assorbito da un gas a quello ceduto dall'altro e calcolarli grazie alla variazione di energia interna, chiamando T_0 la temperatura di equilibrio.

$$\Delta U_1 = Q_{\text{ass}} = c_1 n_1 (T_0 - T_1)$$

$$-\Delta U_2 = Q_{\text{ced}} = c_2 n_2 (T_2 - T_0)$$

Dalla teoria cinetica si è visto che per gas monoatomici $c = 3/2 R$ ed è uguale per tutti i gas monoatomici. Per i gas biatomici il valore di c è diverso ma uguale per tutti i gas biatomici. Essendo quindi entrambi i gas biatomici, $c_1 = c_2$ e quindi la nostra uguaglianza diventa:

$$n_2 (T_2 - T_0) = n_1 (T_0 - T_1)$$

Nel punto a) abbiamo visto che $n_1/n_2 = T_2/T_1$, quindi possiamo sostituire nell'equazione e ottenere:

$$T_1 (T_2 - T_0) = T_2 (T_0 - T_1)$$

Da cui si ottiene:

$$T_0 = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2} = 303 \text{ K} = 30^\circ \text{C}$$

c) Le pressioni finali dei due gas si ricavano dall'equazione di stato:

$$\frac{p_1}{p_0/2} = \frac{T_0}{T_1} \rightarrow p_1 = \frac{p_0 T_0}{2T_1} = p_0 \frac{T_2}{T_1 + T_2}$$

Analogamente per il secondo gas:

$$p_2 = \frac{p_0 T_0}{2T_2} = p_0 \frac{T_1}{T_1 + T_2}$$

E quindi la pressione finale della miscela è di:

$$p = p_1 + p_2 = p_0$$

1.2 Esercitazione 2 - 24 marzo 2026

1. a) La temperatura della Terra è determinata dalla quantità di calore che essa riceve per irraggiamento e da quella che la terra stessa irradia. In condizioni di equilibrio le due quantità sono uguali.
Indicando con r il raggio della Terra, la quantità di calore per unità di tempo che riceve dal sole è¹

$$Q_1 = W\pi r^2$$

E supponendo che la temperatura sulla Terra sia costante, il calore emesso dalla Terra per unità di tempo è

$$Q_2 = 4\pi r^2 \sigma T^4$$

Ponendo $Q_1 = Q_2$ si ottiene

$$T^4 = \frac{W}{4\sigma} \rightarrow T = \left(\frac{W}{4\sigma}\right)^{1/4}$$

E quindi sostituendo si ottiene $T = 277.2 \text{ K} = 4^\circ\text{C}$.

- b) Usiamo gli indici M, T ed S per i dati di Mercurio, Terra e Saturno.
L'energia emessa dal sole nell'unità di tempo è costante, quindi al variare della distanza dal sole, per la conservazione dell'energia, abbiamo che

$$4\pi W_M d_M^2 = 4\pi W_T d_T^2 = 4\pi W_S d_S^2$$

Da questa otteniamo che

$$W_M = W_T \left(\frac{d_T}{d_M}\right)^2 \qquad W_M = W_T \left(\frac{d_T}{d_S}\right)^2$$

E sostituendo:

$$W_M = 6381 \text{ W/m}^2 \qquad W_S = 13.65 \text{ W/m}^2$$

Usando questi valori nell'equazione trovata nel punto a) per la temperatura si ottiene:

$$T_M = 409 \text{ K} \qquad T_S = 88 \text{ K}$$

2. a) Essendo le trasformazioni adiabatiche caratterizzate dal fatto che $\delta Q = 0$, occorre scrivere una espressione di δQ per un gas che segue l'equazione di Van der Waals.
Per farlo, risulta più semplice partire dalla formulazione esplicita di $p = p(V, T)$ rispetto alla funzione $V = V(p, T)$. Useremo quindi come variabili indipendenti volume e temperatura, e come da suggerimento possiamo scrivere l'equazione differenziale del calore:

$$\delta Q = n c_V dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$$

¹ πr^2 e non $4\pi r^2$ perché stiamo considerando ciò che riceve dal sole, considerando quindi la sezione trasversa

Dall'equazione di Van Der Waals, isolando la pressione otteniamo:

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

E quindi possiamo calcolare la derivata parziale:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V - nb}$$

L'equazione del calore diventa:

$$\delta Q = nc_V dT + \frac{nRT}{V - nb} dV$$

Ora possiamo imporre la condizione che la trasformazione sia adiabatica $\delta Q = 0$ e otteniamo:

$$\frac{c_V}{R} \frac{dT}{T} + \frac{d(V - nb)}{V - nb} = 0$$

Integrando si ottiene quindi

$$\ln(T^{c_V/R}) + \ln(V - nb) = \text{cost}$$

E quindi l'equazione delle adiabatichhe reversibili per i gas reali è:

$$T^{c_V/R}(V - nb) = \text{cost}$$

- b) Per ottenere l'energia interna partiamo dal primo principio della termodinamica in forma differenziale

$$\delta Q = dU + p dV$$

E scrivendo $p = p(V, T)$ e con l'equazione del calore trovata nel punto a) otteniamo:

$$nc_V dT + \frac{nRT}{V - nb} dV = dU + \left(\frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}\right) dV$$

E risolvendo rispetto a dU

$$dU = nc_V dT + \frac{an^2}{V^2} dV$$

E integrando, a meno di una costante, si ottiene quindi l'energia interna:

$$U = nc_V T - \frac{an^2}{V}$$

Da notare che, come ci aspettiamo, il caso particolare del gas perfetto si ottiene per $a = 0$.

- c) Quando un gas reale si espande adiabaticamente nel vuoto, sappiamo essere nulli il calore scambiato e il lavoro compiuto, e dal primo principio risulta quindi nulla la variazione di energia interna.

Visto che il volume aumenta, il termine an^2/V diminuisce, e ne consegue che U può restare costante solo se diminuisce anche la temperatura.

3. a) Partiamo considerando il sistema $A + B$, che è un sistema chiuso da pareti adiabatiche, incluso il pistone, e quindi non scambia calore con l'esterno. Ne consegue che applicando il primo principio sul sistema intero avremo che $\Delta U = Q_{tot} - L_{tot} = -L_{tot}$.

Essendo fisso il setto che separa A e B , durante tutta la trasformazione A resta a volume costante, quindi non compie lavoro e $L_{tot} = L_B$. Inoltre, essendo il setto diatermico e la trasformazione reversibile, abbiamo che per tutta la trasformazione i due gas sono in equilibrio termico fra loro e quindi

$$T_A = T_B = T$$

Inoltre, dalla teoria cinetica dei gas, per gas perfetti monoatomici possiamo scrivere la variazione di energia interna come

$$dU_{tot} = n_{tot}c_V dT = (x + n_B)\frac{3}{2}RdT$$

E da quanto appena detto possiamo scrivere il lavoro infinitesimo come

$$dL_{tot} = dL_B = p_B dV_B$$

e scrivendo $p_B = p(V_B, T)$ usando l'equazione dei gas perfetti e sapendo che $\delta Q = 0$, possiamo scrivere il primo principio come:

$$(x + n_B)\frac{3}{2}RdT + \frac{n_B RT}{V_B}dV_B = 0$$

Separando le variabili otteniamo:

$$\frac{3}{2}(x + n_B)\frac{dT}{T} + n_B\frac{dV_B}{V_B} = 0$$

E integrando

$$\frac{3}{2}(x + n_B) \int_{T_i}^{T_f} \frac{1}{T} dT + n_B \int_{V_0}^{4V_0} \frac{1}{V_B} dV_B = 0$$

$$\frac{3}{2}(x + n_B) \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + n_B \ln\left(\frac{4V_0}{V_0}\right) = 0$$

E quindi risolvendo per x troviamo il numero di moli:

$$x = \frac{2n_B \ln(4)}{3 \ln(T_i/T_f)} - n_B = 4.1 \text{ mol}$$

- b) Ora che abbiamo il numero di moli possiamo calcolare il lavoro totale usando la variazione di energia interna:

$$\begin{aligned} L_{tot} &= -\Delta U_{tot} = -(x + n_B)\frac{3}{2}R(T_f - T_i) \\ &= \left[\frac{2n_B \ln(4)}{3 \ln(T_i/T_f)} \right] \frac{3}{2}R(T_i - T_f) = 3.2 \cdot 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

1.3 Esercitazione 3 - 30 marzo 2026

1. a) La temperatura interna è maggiore di quella esterna, quindi il climatizzatore funziona come pompa di calore.
La potenza dissipata per conduzione attraverso le pareti è di

$$P_{\text{diss}} = K \frac{S}{D} (T_i - T_e) = 5.2 \text{ kW}$$

Il climatizzatore non deve compensare tutta questa potenza dissipata perché è aiutato dall'esistenza di un'altra fonte di calore interna alla stanza: gli studenti e i computer. Questi producono

$$P_{\text{gen}} = 10 \cdot (100 + 150) \text{ W} = 2.5 \text{ kW}$$

Quindi la macchina termica deve produrre

$$Q_i / \Delta t = P_{\text{diss}} - P_{\text{gen}} = 2.7 \text{ kW}$$

Dal coefficiente di prestazione sappiamo che

$$\omega = \frac{Q_i / \Delta t}{W}$$

con W la potenza elettrica che il climatizzatore deve assorbire.

Essendo il climatizzatore una macchina di Carnot reversibile sappiamo che il coefficiente di prestazione dipende dalle temperature fra cui opera la macchina ed in particolare vale:

$$\omega = \frac{T_i}{T_i - T_e}$$

Quindi la potenza elettrica necessaria vale:

$$W = \frac{Q_i / \Delta t}{\omega} = (P_{\text{diss}} - P_{\text{gen}}) \frac{T_i - T_e}{T_i} = 119 \text{ W}$$

- b) Nel secondo caso non ci sono fonti di calore interne alla stanza, quindi il calore generato dal climatizzatore deve compensare solo il calore dissipato per conduzione.

$$P_{\text{gen}} = 0 \rightarrow Q_i / \Delta t = P_{\text{diss}}$$

E quindi usando gli stessi calcoli del punto a) si ottiene

$$W = P_{\text{diss}} \frac{T_i - T_e}{T_i} = 229 \text{ W}$$

2. a) La trasformazione **AB** è un'isobara irreversibile: la pressione è costante, il volume raddoppia e quindi dall'equazione di stato dei gas perfetti sappiamo che anche la temperatura (in Kelvin) raddoppia.

$$V_B = 2V_A \rightarrow T_B = 2T_A = 546 \text{ K}$$

Il fatto che sia una trasformazione irreversibile ci impedisce di ragionare su quello che succede istante per istante, ma possiamo comunque sfruttare il fatto che l'energia interna sia funzione di stato: la trasformazione **AB** causerà al gas la stessa variazione di energia interna indipendentemente dal percorso che è stato compiuto per arrivare da **A** a **B**, sia esso reversibile o irreversibile.

Dalla teoria cinetica sappiamo che vale:

$$\Delta U_{AB} = n c_v \Delta T = \frac{5}{2} n R (T_B - T_A) = 17 \text{ kJ}$$

Non possiamo calcolare il lavoro come integrale lungo un percorso perché è una trasformazione irreversibile, ma avendo potuto calcolare la variazione di energia interna e sapendo il calore assorbito durante la trasformazione, è possibile usare il primo principio della termodinamica per determinare il lavoro compiuto:

$$L_{AB} = Q_{AB} - \Delta U_{AB} = 5.0 \text{ kJ}$$

Guardiamo ora alla trasformazione **BC**. È una trasformazione adiabatica quindi non c'è scambio di calore. Sappiamo che

$$V_C = 3V_A = \frac{3}{2}V_B$$

E per le adiabatiche vale la relazione

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost} \rightarrow T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1} = 465 \text{ K}$$

E dal primo principio possiamo calcolarci il lavoro partendo dalla variazione di energia interna:

$$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = -n c_v (T_C - T_B) = 5.1 \text{ kJ}$$

La trasformazione **CD** è una isobara reversibile, quindi possiamo calcolarci il lavoro integrando $p dV$:

$$L_{CD} = p \Delta V = p V_D - p V_C = n R T_D - n R T_C = n R \Delta T_{CD} = -4.8 \text{ kJ}$$

Infine la trasformazione **DA** è una isoterma reversibile, quindi possiamo calcolare il lavoro come

$$L_{DA} = n R T_A \ln(V_A/V_D) = n R T_A \ln(P_D/P_A)$$

Dove possiamo calcolarci la pressione in D rispetto a quella in A usando le relazioni della trasformazione adiabatica **BC**:

$$P_D = P_C = P_B \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma} = P_A \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma}$$

E quindi il lavoro della isoterma risulta:

$$L_{DA} = n R T_A \gamma \ln(V_B/V_C) = -3.9 \text{ kJ}$$

Quindi il lavoro totale compiuto dal ciclo risulta di

$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = 1.4 \text{ kJ}$$

b) Per calcolare il rendimento del ciclo possiamo usare

$$\eta = L/Q_{ass}$$

Dove il calore assorbito è solo quello della trasformazione **AB**. Infatti l'espansione **BC** è adiabatica, e nelle altre trasformazioni il gas cede calore. Quindi usando i dati forniti e i conti del punto a) otteniamo

$$\eta = L/Q_{AB} = 6.5\%$$

c) se la trasformazione **AB** fosse reversibile, possiamo calcolare il lavoro della trasformazione integrando pdV e possiamo ricavare il calore assorbito dal primo principio:

$$L'_{AB} = p_A \Delta V = nR(2T_A - T_A) = nRT_A = 6.8 \text{ kJ}$$

$$Q'_{AB} = \Delta U_{AB} + L'_{AB} = 23.8 \text{ kJ}$$

E quindi il lavoro totale diventa $L' = 3.3 \text{ kJ}$ e il rendimento

$$\eta' = \frac{L'}{Q'_{AB}} = 14\%$$

d) La temperatura minima del ciclo è T_A mentre la temperatura massima è $T_B = 2T_A$. Quindi l'efficienza di un ciclo di Carnot operante fra queste temperature risulta di

$$\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{1}{2} = 50\%$$

3. a) Per calcolare il rendimento possiamo guardare calore assorbito e calore ceduto durante il ciclo. Avendo due trasformazioni adiabatiche, l'unica trasformazione in cui il sistema assorbe calore è l'espansione isobara, mentre l'unica trasformazione in cui il sistema cede calore è quella isocora. Sono tutte trasformazioni reversibili, quindi in termini generali possiamo calcolare i calori di queste trasformazioni:

$$Q_2 \text{ per la trasformazione isobara da } T_2 \text{ a } T_3: Q_2 = nc_p(T_3 - T_2)$$

$$Q_4 \text{ per la trasformazione isocora da } T_4 \text{ a } T_1: Q_4 = nc_v(T_1 - T_4)$$

E quindi l'efficienza generale di un ciclo di Diesel è di:

$$\eta = 1 + \frac{Q_4}{Q_2} = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{\gamma(T_3 - T_2)}$$

Dove è stata usata la relazione $\gamma = c_p/c_v$. È quindi sufficiente trovare le temperature a cui opera il ciclo per trovare l'efficienza.

Alla fine della compressione adiabatica il gas avrà una temperatura di

$$T_2 = T_1(V_1/V_2)^{\gamma-1} = T_1 r^{\gamma-1} = 953 \text{ K}$$

Nella espansione isobara sappiamo che vale

$$V_2/T_2 = V_3/T_3$$

E possiamo quindi definire il rapporto di cut-off α come

$$\alpha = V_3/V_2 = T_3/T_2 = 2.1$$

Questo ci serve solo per semplificare i conti e toglierci di mezzo i volumi, visto che ci interessano solo le temperature del ciclo.

Nell'espansione adiabatca possiamo usare la stessa relazione di prima fra temperature e volumi:

$$T_4 = T_3(V_3/V_4)^{\gamma-1}$$

E possiamo scrivere riscrivere il rapporto fra i volumi come

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_3}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{\alpha}{r}$$

E quindi

$$T_4 = T_3(\alpha/r)^{\gamma-1} = 847 \text{ K}$$

Inserendo quindi tutte le temperature nella formula precedentemente trovata, si ottiene un rendimento di

$$\eta = 62.6\%$$

- b) Il comportamento limite per il ciclo Diesel, che opera fra le temperature T_3 e T_1 , non si ha per r che tende ad infinito, perché la condizione limite è quella in cui la temperatura raggiunta alla fine della compressione adiabatca sia la temperatura massima T_3 . Quindi il limite corretto è $T_2 \rightarrow T_3$ o, sfruttando la definizione di α

$$\alpha \rightarrow 1$$

Scriviamo quindi tutte le temperature precedentemente calcolate in funzione di T_1 :

$$T_1 = T_1$$

$$T_2 = T_1 r^{\gamma-1}$$

$$T_3 = \alpha T_2 = \alpha T_1 r^{\gamma-1}$$

$$T_4 = T_3(\alpha/r)^{\gamma-1} = (\alpha T_1 r^{\gamma-1}) \cdot (\alpha/r)^{\gamma-1} = \alpha^\gamma T_1$$

E quindi scrivendo il rendimento come funzione di α ed r otteniamo:

$$\eta = 1 - \frac{\alpha^\gamma T_1 - T_1}{\gamma(\alpha T_1 r^{\gamma-1} - T_1 r^{\gamma-1})} = 1 - \frac{\alpha^\gamma - 1}{\gamma(\alpha - 1)} \cdot \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

E facendo il limite per $\alpha \rightarrow 1$, abbiamo che la componente dipendente da α tende a 1 (verificare per esercizio), mentre r tenderà al valore massimo, ossia quello in cui T_2 sarà uguale a T_3 .

Dalle relazioni delle adiabatcche sappiamo che $T_2 = T_1 r^{\gamma-1}$ e quindi se T_2 tende a T_3 avremo che il massimo valore di r consentito sarà $r^{\gamma-1} = T_3/T_1$. Sostituendo tutto nel rendimento abbiamo quindi

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \eta = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

Che è proprio il rendimento di una macchina di Carnot operante fra le temperature minime e massime del ciclo. Risulta quindi chiaro che all'aumentare del rapporto di compressione aumenta il rendimento del ciclo, ma allo stesso tempo nel caso limite il ciclo corrisponde ad una trasformazione adiabatica percorsa in ambo i versi, e quindi non viene prodotto alcun lavoro. Il rendimento massimo di un ciclo di Diesel corrisponde quindi a quello di un ciclo di Carnot ma solo a livello ideale, poiché sarebbe un ciclo inutilizzabile per produrre lavoro.

1.4 Esercitazione 4 - 13 aprile 2026

1. a) Caso: gas perfetto, espansione isoterma reversibile

La variazione di entropia del gas si calcola sfruttando il fatto che la trasformazione avviene a temperatura costante:

$$\Delta S_{gas} = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q}{T} = \frac{nRT \ln(V_f/V_i)}{T} = nR \ln(\alpha)$$

Trattandosi di una trasformazione reversibile la variazione dell'entropia dell'Universo è nulla.

b) Caso: gas perfetto, espansione libera

Nel caso di espansione libera, il gas non compie/subisce alcun lavoro e non scambia calore. Quindi la variazione di energia interna è nulla, e per un gas perfetto questo implica che anche la variazione di temperatura del gas è nulla.

Essendo l'entropia una funzione di stato, la variazione di entropia del gas dipende solo dal punto di partenza e da quello di fine e non dal percorso. Si può quindi calcolare questa lungo un percorso reversibile, che in questo caso è proprio quello di una trasformazione isoterma. La variazione di entropia del gas è quindi la stessa del punto a), e non essendoci stato scambio di calore con l'ambiente, la variazione di entropia di questo risulta nulla. Quindi:

$$\Delta S_U = \Delta S_{gas} = nR \ln(\alpha) > 0$$

c) Caso: gas reale, espansione isoterma reversibile

Nell'esercitazione n.2 si è visto come ricavare il valore di δQ per un gas reale che obbedisce all'equazione di Van der Waals, e vale:

$$\delta Q = n c_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV$$

Trattandosi di un'isoterma $dT = 0$, quindi

$$\delta Q = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV$$

E per l'entropia

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV$$

Dall'equazione di stato del gas reale si calcola la derivata parziale:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{nR}{V - bn^2}$$

Da cui

$$\Delta S_{gas} = \int_{V_i}^{V_f} nR \frac{dV'}{V' - bn^2} = nR \ln \left(\frac{\alpha V - bn^2}{V - bn^2} \right)$$

Come nel caso del gas reale, essendo una trasformazione reversibile la variazione di entropia dell'universo sarà nulla.

d) **Caso: gas reale, espansione libera**

Nel caso di un gas reale, sappiamo che l'energia interna non dipende solo dalla temperatura, in particolare vale

$$U = nc_v T - \frac{an^2}{V} = U(V, T)$$

Quindi, anche se l'espansione libera non fa variare l'energia interna, la temperatura del gas reale varia (ed in particolare $T_f < T_i$). Ne emerge che, a differenza del caso dei gas perfetti, le trasformazioni isoterme non coincidono con le trasformazioni isoenergetiche. Per calcolare la variazione di entropia del gas andrebbe quindi scelto un opportuno percorso reversibile che porti allo stesso stato finale ottenuto nell'espansione libera (ad esempio scrivendo esplicitamente l'equazione delle isoenergetiche dei gas reali e calcolando la variazione di entropia lungo una isoenergetica reversibile). Come per il gas perfetto, la variazione dell'entropia dell'universo sarà nulla e pari alla sola variazione di entropia del gas, non essendo stato scambiato calore con l'ambiente:

$$\Delta S_U = \Delta S_{gas} > 0$$

2. a) Partiamo completando le informazioni sugli stati B e D.
La trasformazione BC è isocora, quindi

$$\frac{p_B}{T_B} = \frac{p_C}{T_C} \rightarrow T_B = 133 \text{ K}$$

La trasformazione AB è isobara, quindi il volume è proporzionale alla temperatura:

$$V \propto T \rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{2}{3} \rightarrow V_B = \frac{2}{3}V_A = V_C$$

In modo analogo, la trasformazione CD è isobara e quindi possiamo ricavare la temperatura nel punto D

$$\frac{T_D}{T_C} = \frac{V_D}{V_C} = \frac{3}{2} \rightarrow T_D = T_A \frac{3}{2} = 300 \text{ K}$$

Visto che vogliamo calcolare il rendimento del ciclo, partiamo calcolando il lavoro compiuto.

Le isocore non compiono lavoro, quindi devo solo considerare le due trasformazioni isobare reversibili:

$$L_{AB} = nR(T_B - T_A) = -1.11 \text{ kJ}$$

$$L_{CD} = nR(T_D - T_C) = +1.66 \text{ kJ}$$

E quindi

$$L = L_{AB} + L_{CD} = 0.55 \text{ kJ}$$

Il calore viene assorbito lungo due trasformazioni: BC e CD.

BC è isocora quindi

$$Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B) = 2.77 \text{ kJ}$$

Mentre CD è isobara quindi

$$Q_{CD} = nc_p(T_D - T_C) = 5.82 \text{ kJ}$$

Quindi il calore totale assorbito è di $Q_{ass} = 8.59 \text{ kJ}$ e il rendimento è

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = 6.45\%$$

- b) Il contributo alla variazione di entropia dell'universo delle trasformazioni reversibili è nullo. Possiamo quindi considerare la sola trasformazione DA irreversibile.

$$\Delta S_U = \Delta S_{gas} + \Delta S_{serb}$$

Per il gas, possiamo porci su un cammino reversibile e quindi

$$\Delta S_{gas} = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{nc_v dT}{T} = nc_v \ln \frac{T_A}{T_D} = -16.9 \text{ J/K}$$

Il serbatoio invece assorbe il calore a temperatura costante, e per un'isocora il calore totale scambiato non dipende dalla reversibilità della trasformazione (l'energia interna è funzione di stato, il lavoro è nullo, quindi il calore è sempre uguale alla variazione di energia interna):

$$\Delta S_{serb} = \frac{Q}{T} = \frac{nc_v \Delta T}{T_A} = 20.8 \text{ J/K}$$

Quindi $\Delta S_U = 3.9 \text{ J/K}$

- c) La temperatura minima raggiunta dal ciclo è $T_B = (2/3)T_A$ e quella massima è di $T_D = (3/2)T_A$. Quindi il rendimento del ciclo di carnot equivalente è

$$\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_B}{T_D} = 1 - \frac{4}{9} = 55.6\%$$

3. a) L'universo termodinamico da considerare in questo problema è fatto da 3 elementi: l'acqua, il serbatoio usato per scaldarla, e l'ambiente (ossia il serbatoio usato per raffreddarla).

Sapendo il volume d'acqua, possiamo ricavare la massa di questa come $m = \rho/V = 0.2 \text{ Kg}$.

Il calore scambiato vale, nella formula generica:

$$Q = mc_s \Delta T$$

E nella formulazione differenziale

$$\delta Q = mc_s dT$$

Essendo l'entropia funzione di stato, per calcolare la variazione di entropia dell'acqua, possiamo sempre considerare un cammino fittizio reversibile con $\delta Q_{rev} = mc_s dT$. Quindi:

$$\Delta S_{acqua} = \int \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{mc_s dT}{T} = mc_s \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc_s \ln \frac{T_f}{T_i}$$

Per i serbatoi, che per definizione sono a temperatura costante, invece vale

$$\Delta S_{serb} = \frac{-Q}{T} = \frac{-mc_s \Delta T}{T_{serb}}$$

Ora che abbiamo tutti gli elementi possiamo calcolare la variazione di entropia dell'universo lungo le due trasformazioni.

Per il riscaldamento abbiamo:

$$Q_1 = mc_s(T_2 - T_1) = 5.86 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\Delta S_{acqua} = mc_s \ln \frac{T_2}{T_1} = +179 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{serb} = \frac{-Q_1}{T_2} = -102 \text{ J/K}$$

E quindi la variazione di entropia dell'universo del processo di riscaldamento è $\Delta S_{U,1} = +77 \text{ J/K}$

Per il raffreddamento nel primo caso, abbiamo

$$Q_2 = mc_s(T_3 - T_2) = -4.19 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\Delta S_{acqua} = mc_s \ln \frac{T_3}{T_2} = -124 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{serb} = \frac{-Q_2}{T_1} = 143 \text{ J/K}$$

E quindi $\Delta S_{U,2} = +19 \text{ J/K}$ e la variazione di entropia dell'universo per aver fatto un tè risulta di

$$\Delta S_U = \Delta S_{U,1} + \Delta S_{U,2} = 96 \text{ J/K}$$

- b) La parte del riscaldamento resta invariata, va quindi ricalcolata la variazione di entropia per il raffreddamento del tè fino alla nuova temperatura finale:

$$Q'_2 = mc_s(T_1 - T_2) = -5.86 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\Delta S'_{acqua} = mc_s \ln \frac{T_1}{T_2} = -179 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{serb} = \frac{-Q'_2}{T_1} = +200 \text{ J/K}$$

E quindi $\Delta S'_{U,2} = +21 \text{ J/K}$ e la variazione di entropia dell'universo per aver fatto raffreddare il tè fino a temperatura ambiente risulta di

$$\Delta S_U = \Delta S_{U,1} + \Delta S'_{U,2} = 98 \text{ J/K}$$