

8

COMPORTAMENTO DELLE NELLE TRAVI INFLESSE

A. A. 2025-2026
Corso di **Tecnica delle costruzioni**

Comportamento delle travi inflesse

MODELLO DI CALCOLO per le TRAVI INFLESSE SENZA ARMATURA D'ANIMA

Per le travi senza armature d'anima si è visto che il modello fondamentale per il calcolo della resistenza a taglio è il modello a pettine.

Quanto visto era riferito a moduli elementari di conci di trave con caratteristiche costanti.

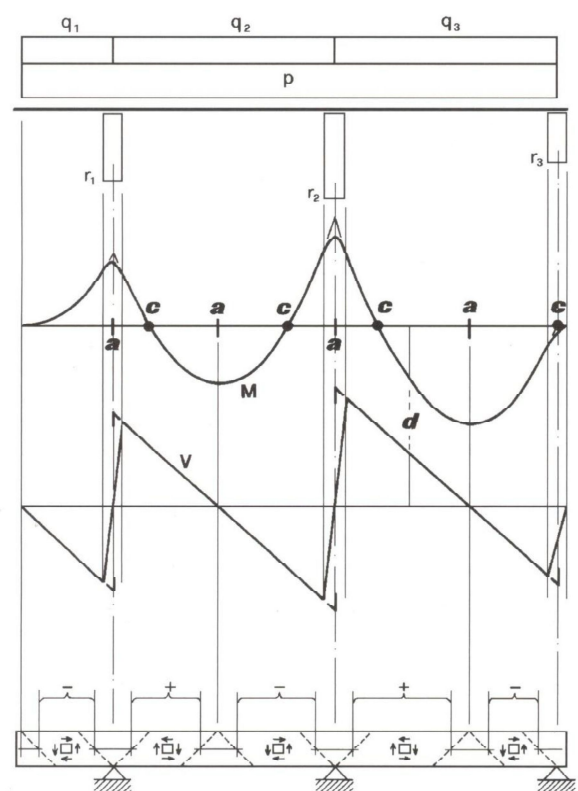
Si vuole ora estendere l'analisi alla generica trave in c.a. a più campate, in cui il diagramma del taglio non è costante.

Diagramma del **MOMENTO** →

Diagramma del **TAGLIO** →

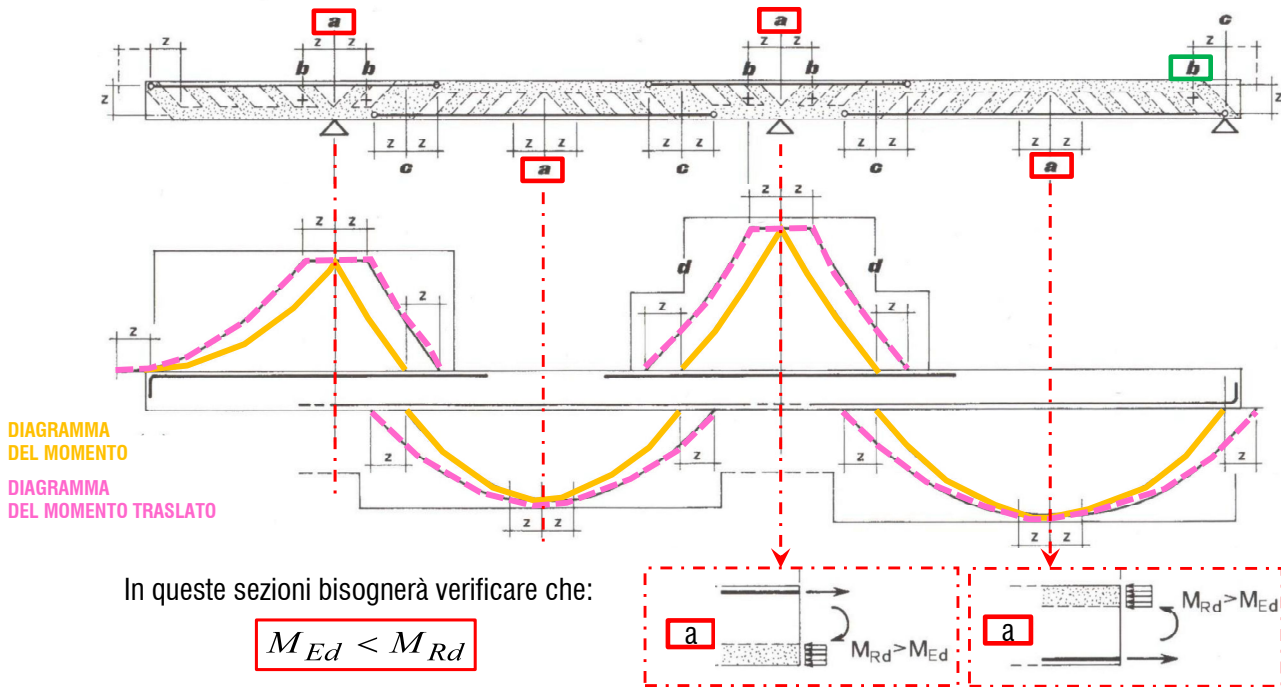
Osserviamo, in particolare, tratti con taglio a segno costante, separati da zone di transizione.

Si avranno tratti con taglio a segno costante, separati da zone di transizione (con taglio nullo) attorno ai quali cambia l'orientamento dei conci inclinati di cls, coerentemente con il verso orario/antiorario del taglio.



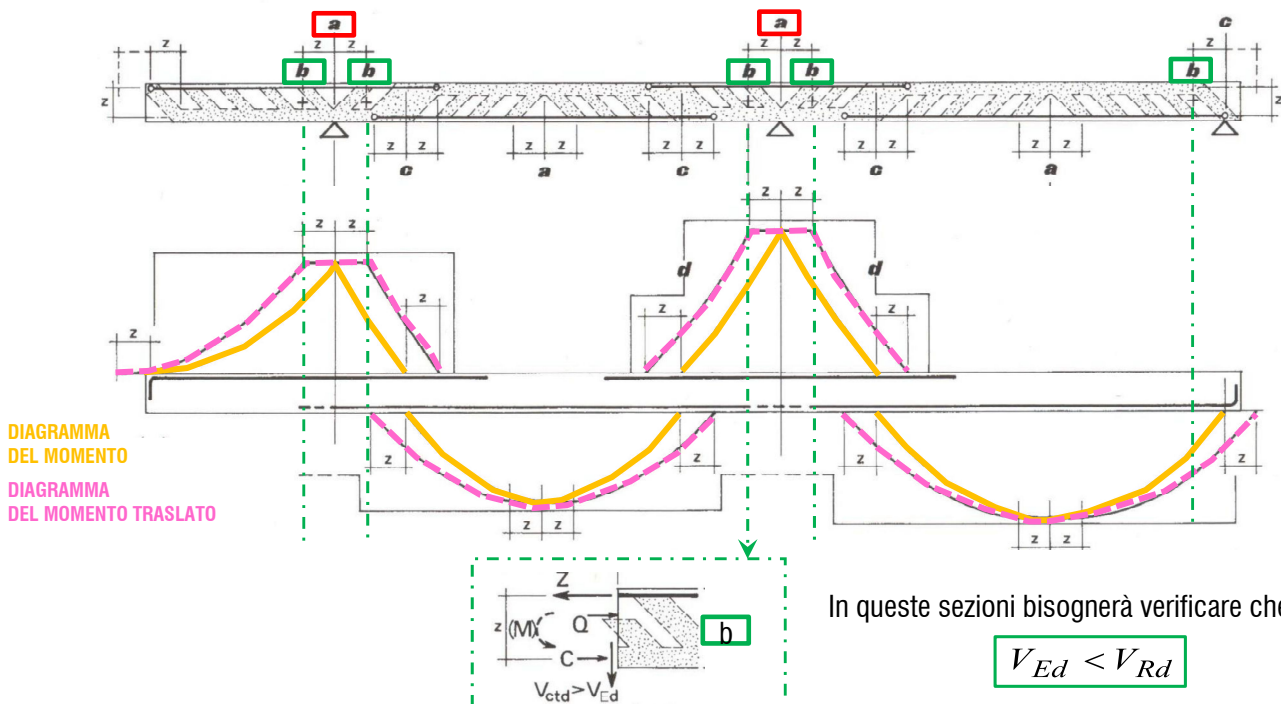
Nella generica trave continua su più appoggi, si possono individuare 4 tipi di sezione:

- Tipo a: sezioni soggette a momento massimo



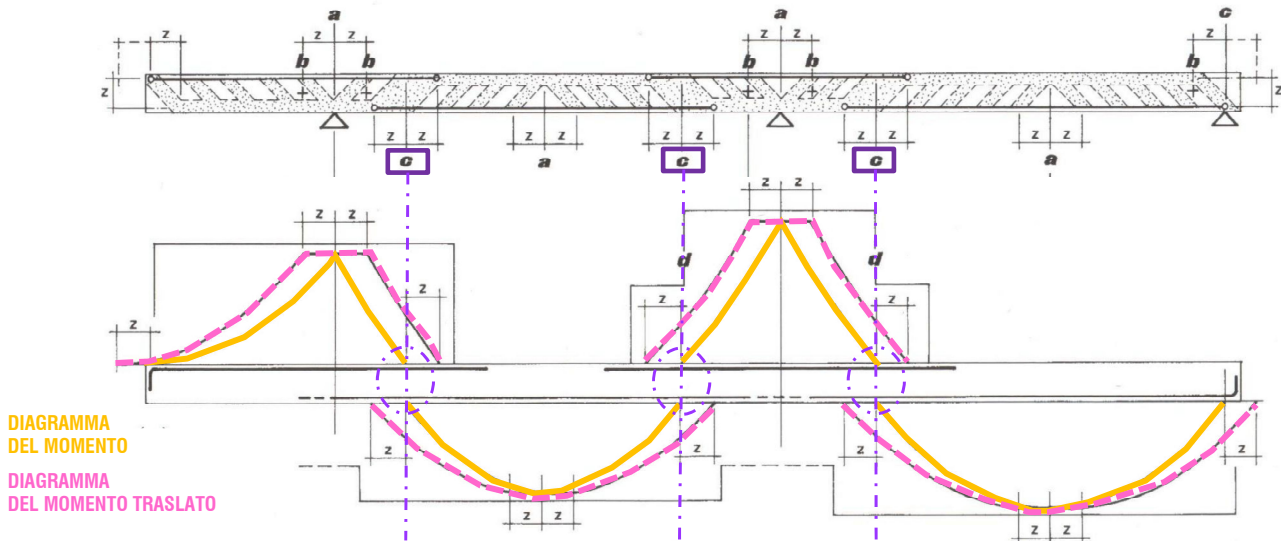
Nella generica trave continua su più appoggi, si possono individuare 4 tipi di sezione:

- Tipo a: sezioni soggette a momento massimo
- Tipo b: sezioni soggette a taglio massimo



Nella generica trave continua su più appoggi, si possono individuare 4 tipi di sezione:

- Tipo a: sezioni soggette a momento massimo
- Tipo b: sezioni soggette a taglio massimo
- Tipo c: sezioni al centro delle zone di cambiamento di segno del momento

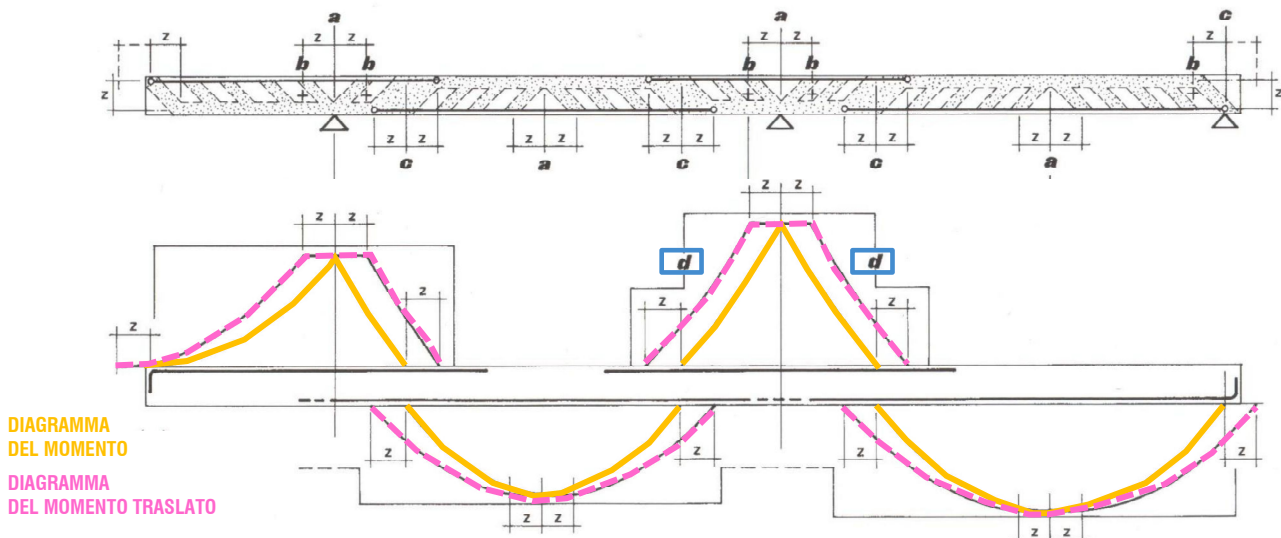


In queste zone si invertono i ruoli dei correnti teso e compresso, con una sovrapposizione $+z/z$ delle trazioni stesse (essendo l'inclinazione puntoni 45°).

L'applicazione delle verifiche a momento e a taglio nelle sezioni di **tipo a** e **tipo b** sistema automaticamente la sovrapposizione delle armature sulle sezioni di **tipo c**.

Nella generica trave continua su più appoggi, si possono individuare 4 tipi di sezione:

- Tipo a: sezioni soggette a momento massimo
- Tipo b: sezioni soggette a taglio massimo
- Tipo c: sezioni al centro delle zone di cambiamento di segno del momento
- Tipo d: sezioni soggette a taglio e momento diversi da zero, in cui viene variata l'armatura (o di sez. della trave)

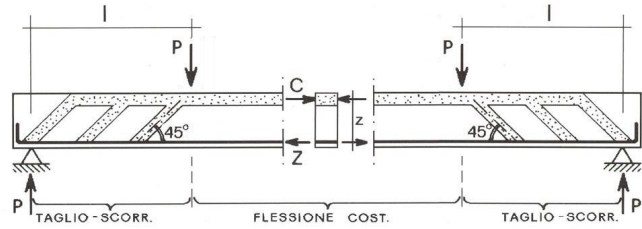


Dovranno essere eseguite entrambe le verifiche (a momento e a taglio) nelle sezioni di **tipo d**, tenendo conto della modificata configurazione della sezione

COMPORTAMENTO AD ARCO

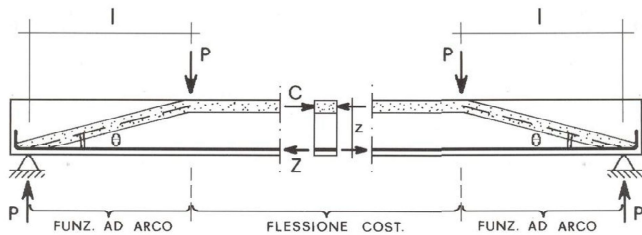
Abbiamo visto per le travi prive di armatura d'anima che il modello fondamentale di resistenza a taglio si basa sul

Modello a pettine (crisi per taglio-scorrimento):
puntoni compressi di calcestruzzo inclinati di 45°



Tuttavia, nelle zone delle travi in prossimità di azioni concentrate (carichi puntuali, reazioni ai vincoli) insorge anche un altro meccanismo di risposta

Modello ad arco:
deviazione delle azioni su un flusso di compressioni direttamente orientato sull'appoggio.



In generale, quindi il collasso della trave d'esempio (a campata singola) può avvenire per:

- 1) rottura per **momento flettente** di una sezione del tratto centrale;
- 2) rottura per **taglio-scorrimento** di un concio laterale secondo il meccanismo a pettine;
- 3) rottura con **funzionamento ad arco** di una sezione laterale (con cedimento a compressione del calcestruzzo o a trazione dell'acciaio)

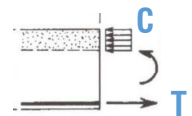


Consideriamo inizialmente solo 1) e 2):

1) Il collasso si attiva al raggiungimento del momento resistente (v. lezione su Flessione semplice):

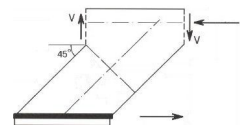
$$M_{Rd} \cong \underbrace{0.2dbf_{cd}}_C z = \underbrace{\rho_s dbf_{yd}}_T z \quad \bar{x} \cong 0.2d \quad \rho_s = A_s/db$$

C Corrente compresso (calcestruzzo)
T Corrente teso (armatura)



2) Il collasso si attiva al raggiungimento del taglio resistente (v. lezione su Taglio):

$$V_{Rd} = 0.18bd\kappa \frac{(100\rho_s f_{ck})^{1/3}}{\gamma_c}$$



Affinché la trave non collassi, devono rimanere integri sia i correnti (teso e compresso), sollecitati dal momento flettente (1) sia i conci d'anima sollecitati dallo scorrimento (2).

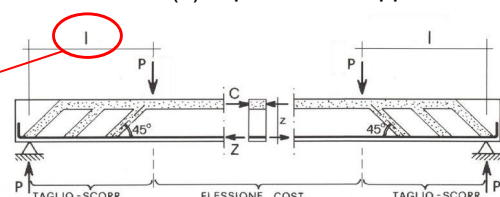
Quindi il più debole determina la resistenza della trave.

Il prevalere del collasso per flessione (1) o del collasso per taglio-scorrimento (2) dipende dal rapporto di forma λ della trave:

$$\lambda = \frac{l}{z} = \text{ctg } \vartheta = \frac{M}{Vz}$$

$$M = V \cdot l$$

l = luce di taglio



Si cerca quindi di correlare le situazioni sopradette alla snellezza della trave (o, meglio, al suo rapporto di forma λ).



Adimensionalizziamo M_{Rd} e V_{Rd} con M_{Rd} e chiamiamo tale rapporto μ :

λ rapporto di forma della trave

In (1) avremo: $\mu = \frac{M_{Rd}}{M_{Rd}} = 1$

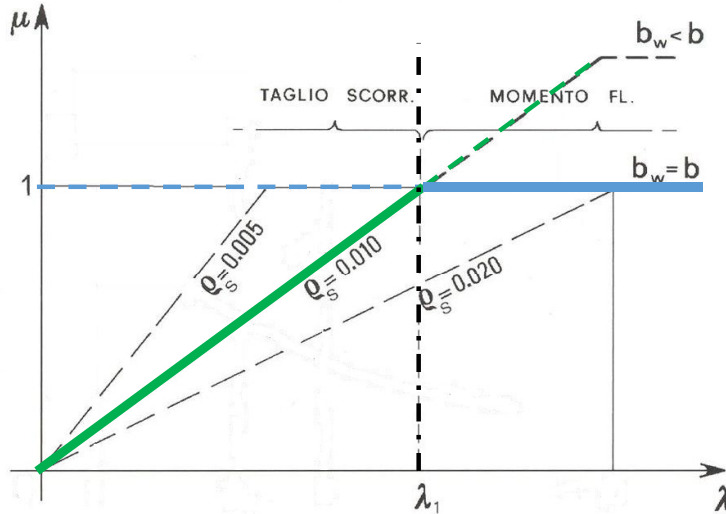
È costante con λ (retta orizzontale nel diagramma $\lambda-\mu$)

In (2) avremo: $\mu = \frac{V_{Rd} l}{M_{Rd}} = \frac{0.18 db (100 \rho_s f_{ck})^{1/3}}{\rho_s db f_{yd} \gamma_c} \cdot \frac{l}{z}$

$\mu \approx \frac{\lambda}{300 \rho_s^{2/3}}$

Ponendo $\frac{\gamma_c f_{yd}}{f_{ck}^{1/3}} \approx 250$

Dipendenza diretta e lineare da λ (retta inclinata nel diagramma $\lambda-\mu$)



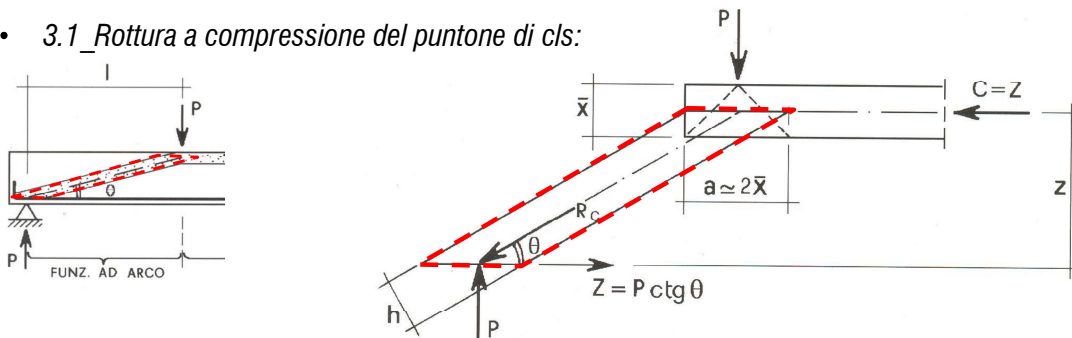
Quando $\lambda < \lambda_1$, comanda (2)
Quando $\lambda > \lambda_1$, comanda (1)

La pendenza della retta verde aumenta al diminuire della percentuale di armatura longitudinale ρ_s .

Consideriamo ora anche 3):

3) Il collasso per meccanismo ad arco può essere associato alla rottura del puntone di calcestruzzo nel quale si convogliano le compressioni provenienti dalle impronte concentrate del carico P o alla rottura del tirante (armatura metallica longitudinale)

3.1 Rottura a compressione del puntone di cls:



Resistenza a compressione del puntone di cls:

$R_{cR} = hb \cdot f_c = (a \cdot \sin \vartheta) b f_c$

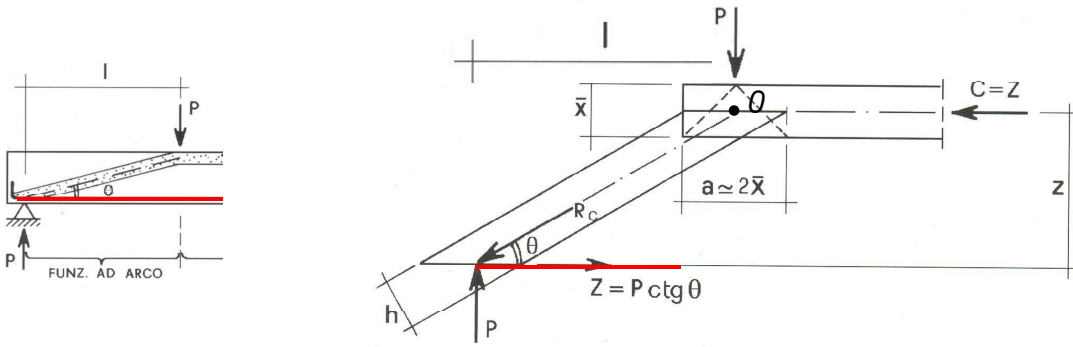
Valore del carico P associato al collasso a compressione del puntone compresso di cls:

$P_{Rd} = R_{cR} \sin \theta = a b f_c \sin^2 \vartheta$

$P_{Rd} \cong 0.4 d b f_c \sin^2 \vartheta$

Essendo $a \approx 2\bar{x} \approx 2 \cdot 0.2d \approx 0.4d$

3.2_Rottura a trazione del tirante (armatura metallica longitudinale):



Resistenza a trazione del tirante metallico:

$$Z_R = A_s f_y = \rho_s db f_y \quad \rho_s = A_s / db$$

Valore del carico P associato al collasso a trazione del tirante:

$$P_{Rd} = Z_R \cdot z / l = Z_R / \lambda \quad \text{Equilibrio alla rotazione rispetto ad O (Zz = Pl)}$$

$$P_{Rd} = \rho_s db f_y / \lambda$$

Adimensionalizziamo anche P_{Rd} con M_{Rd} e chiamiamo tale rapporto μ :

In (3) avremo:

M_{Rd} espressa con rif.to alla resistenza del cls compresso

$$\mu = \frac{P_R l}{M_{Rd}} = \frac{0.4 db f_{cd} l}{0.2 db f_{cd} z} \sin^2 \vartheta = 2 \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

M_{Rd} espressa con rif.to alla resistenza dell'armatura tesa

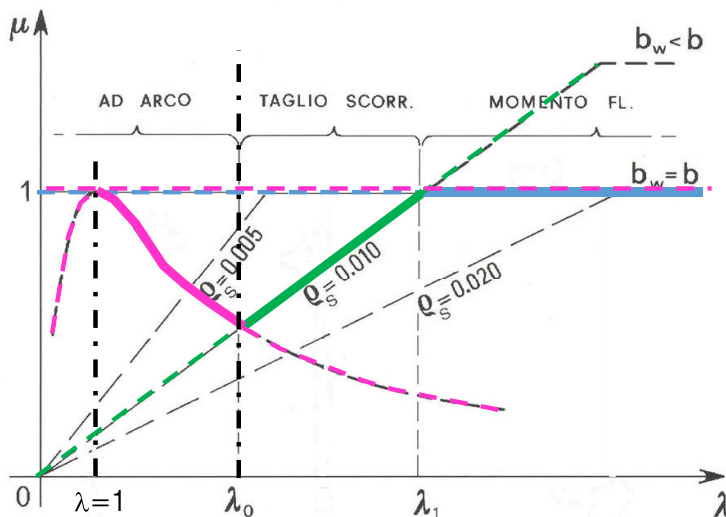
$$\mu = \frac{P_R l}{M_{Rd}} = \frac{\rho_s db f_y l / \lambda}{\rho_s db f_y z} = 1$$

λ rapporto di forma della trave

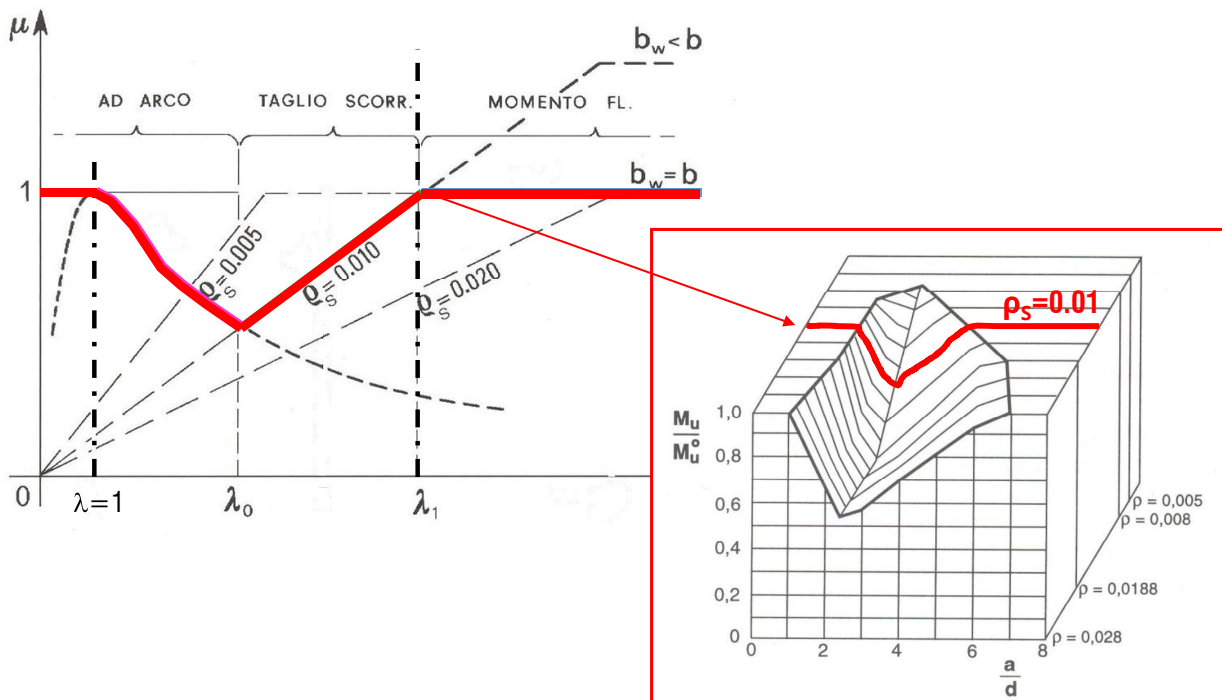
$$\lambda = \frac{l}{z} = \text{ctg } \vartheta$$

$$\sin^2 \vartheta = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

Dipendenza non lineare da λ

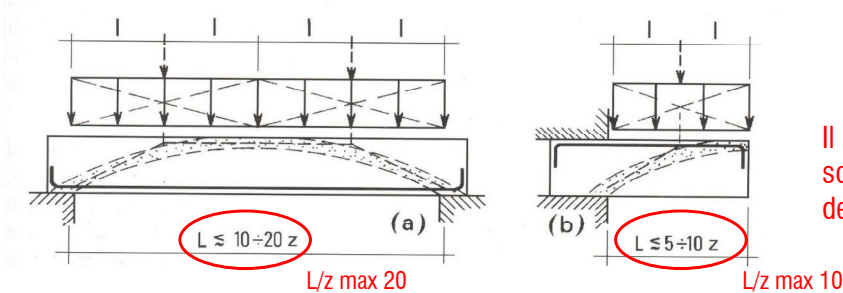


Possiamo quindi fare affidamento al comportamento ad arco entro certi limiti di snellezza della trave ($\lambda < \lambda_0$)



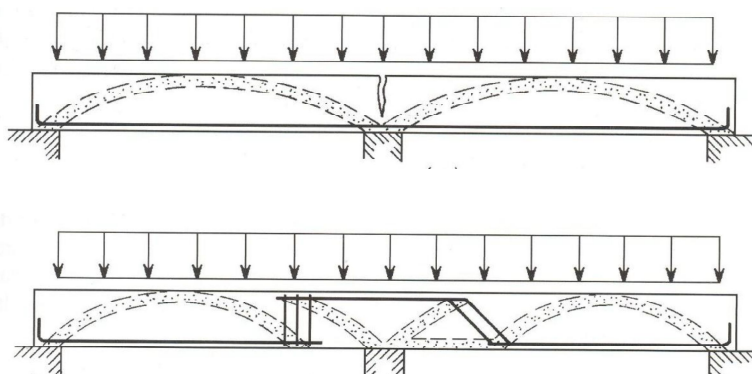
Se si rappresenta il dominio di rottura della trave in un grafico tridimensionale λ - μ - ρ_s si ottiene la cosiddetta «valle di taglio» (ottenuta da Kani), che si restringe al diminuire della quantità di armatura longitudinale ρ_s . Se la luce di taglio λ cade all'interno della valle di taglio, la trave collasserà per taglio (a scorrimento o, entro certi limiti di snellezza, ad arco).

Esempi di meccanismi ad arco nelle travi con carico distribuito e nelle travi continue su più appoggi.



Il meccanismo ad arco è verosimile solo **entro certi limiti di snellezza** della trave

Chiaramente, l'arco si attiva a seconda di come sono disposte le armature:



Questo schema potrebbe anche funzionare in termini di resistenza, ma dobbiamo fare i conti con le verifiche d'esercizio (fessurazione). Devo inserire armatura d'estradosso!

In questo caso per garantire anche il funzionamento ad arco, è necessario aggiungere armature trasversali (staffe o ferri inclinati) per «appendere» gli archi portati.

Particolari d'appoggio (zone di diffusione)

Se si esclude il funzionamento ad arco (travi snelle), nelle in prossimità degli appoggi si ha un comportamento differente da quello corrente del modello a pettine e va analizzato separatamente (**schemi a tirante-puntone**).

Per APPOGGIO D'ESTREMITA'	
<p>Caso (a): Armatura longitudinale corrente</p>	<p>Cedimento puntone di calcestruzzo ($\theta=45^\circ$) $R_{Rc} \cong S_c \sin \vartheta = 0.4dbf_{cd} \sin^2 \vartheta = 0.2dbf_{cd}$</p> <p>Cedimento barre d'acciaio inferiori $R_{Rs} \cong Z / \operatorname{ctg} \vartheta = A_s f_{yd} / \operatorname{ctg} \vartheta = A_s f_{yd}$</p>
<p>Caso (b): Armatura piegata</p>	<p>Cedimento puntone di calcestruzzo ($\theta=45^\circ$) $R_{Rc} \cong S_c \sin \vartheta = 0.4dbf_{cd} \sin^2 \vartheta = 0.2dbf_{cd}$</p> <p>Cedimento barre piegate $R'_{Rs} \cong S_s \sin \alpha = A_s f_{yd} \sin \alpha$</p>
<p>Caso (c): Armatura longit. corrente + Armatura piegata</p>	<p>Cedimento puntone di calcestruzzo (θ) $R_{Rc} \cong S_c \sin \vartheta = 0.4dbf_{cd} \sin^2 \vartheta$</p> <p>Cedimento barre d'acciaio inferiori $R_{Rs} \cong Z / \operatorname{ctg} \vartheta = A_{st} f_{yd} / \operatorname{ctg} \vartheta$</p> <p>Cedimento barre piegate $R'_{Rs} \cong S_s \sin \alpha = A_{st} f_{yd} \sin \alpha$</p>

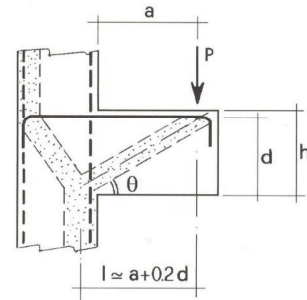
Verifica locale all'appoggio: $R_{Ed} \leq \min(R_{Rc}, R_{Rs}, R'_{Rs})$

Solitamente, nelle zone di diffusione, il problema non è la resistenza a compressione del dente ma quella delle armature e il loro adeguato ancoraggio (trasferimento sforzi attraverso le tensioni tangenziali d'aderenza)

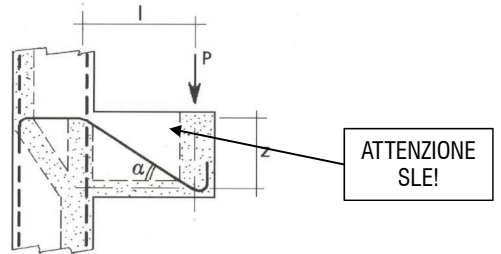
	Per APPOGGIO D'ESTREMITA'	Per APPOGGIO INTERMEDIO
<p>Caso (a): Armatura longitudinale corrente</p>		
<p>Caso (b): Armatura piegata</p>		
<p>Caso (c): Armatura longit. corrente + Armatura piegata</p>		

Anche nel caso di **mensole tozze** si fa riferimento a schemi a puntone-tirante simili a quelli appena visti

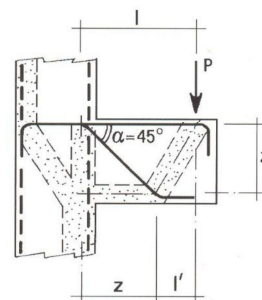
Caso (a):
Armatura longitudinale corrente



Caso (b):
Armatura piegata

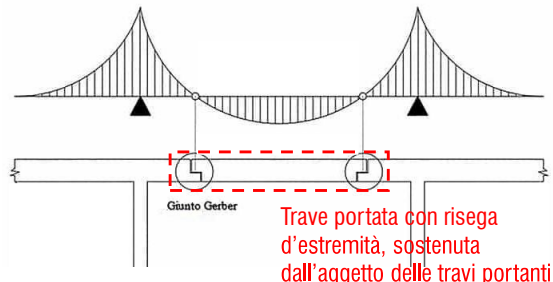


Caso (c):
Armatura longit. corrente + Armatura piegata



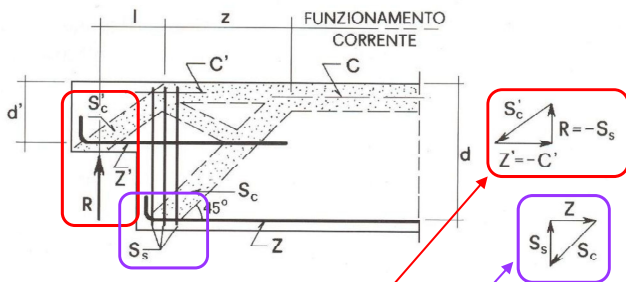
Analoghe soluzioni si prestano anche nelle **selle Gerber**, ampiamente utilizzate in passato per realizzare i giunti nei ponti e negli edifici industriali in c.a.

Si tratta di «appoggi dimezzati» realizzati nell'altezza corrente di una trave portata mediante una risega, sostenuta dall'aggetto di una trave portante, collocati nei punti di inversione di segno del momento.



È FONDAMENTALE PROVVEDERE UN'ADEGUATA ARMATURA ALL'APPOGGIO per RESISTERE A TAGLIO

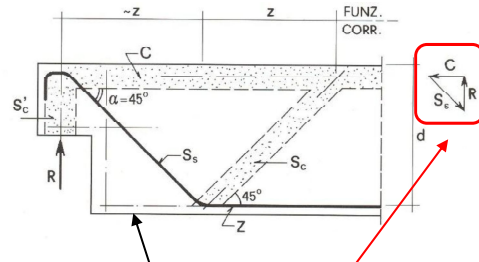
Soluzione (1)



R è equilibrata da Z' (armatura orizzontale) e da S'_c (puntone cls). S'_c è portata al bordo superiore e deviata sull'orizzontale per la presenza della «forza di appensione» S_s (armatura verticale)

Il puntone inclinato di cls S_c è equilibrato da S_s (armatura verticale) e da Z (armatura orizzontale)

Soluzione (2)



R è equilibrata da S_s (armatura piegata) e da C (corrente cls).

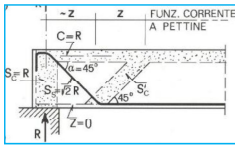
ATTENZIONE SLE!

Appoggi indiretti

CASO 1

Consideriamo l'appoggio d'estremità della trave portata **TS1** sulla trave portante **TP**

Analogia con

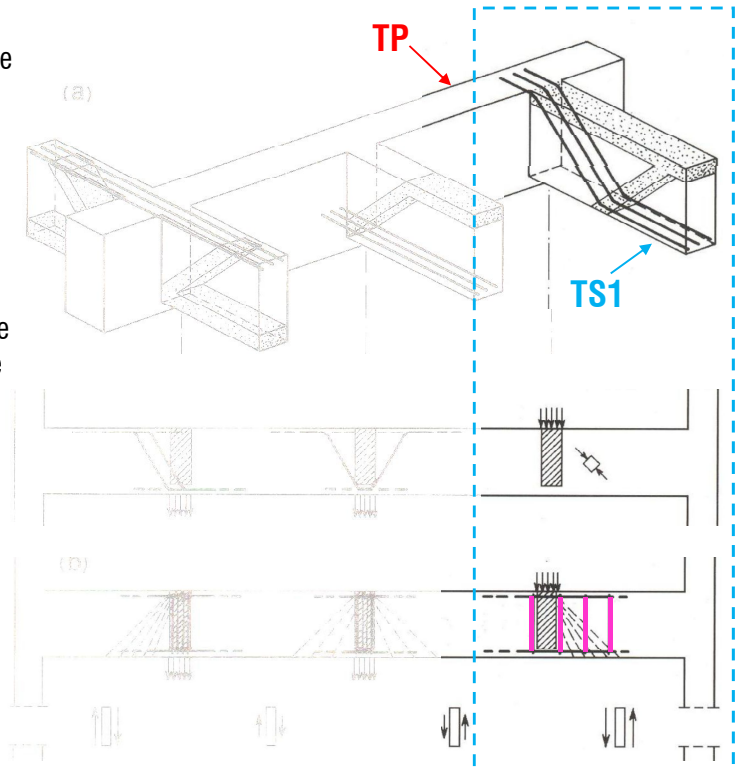
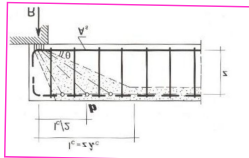


La presenza di **ferri piegati** nella trave **TS1** fa sì che la **TS1** sia «appesa» alla **TP**, permettendo l'efficace trasferimento della reazione d'appoggio di **TS1** su **TP**.

La presenza di **staffe** nella **TP** favorisce la diffusione delle tensioni nella **TP** indotte dalla reazione concentrata di **TS1**

(cfr. con modello «a ventaglio», si vedrà in seguito)

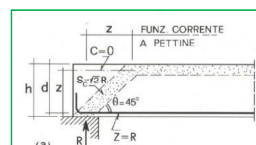
Analogia con



CASO 2

Consideriamo l'appoggio d'estremità della trave portata **TS2** (priva di ferri piegati) sulla trave portante **TP**

Analogia con



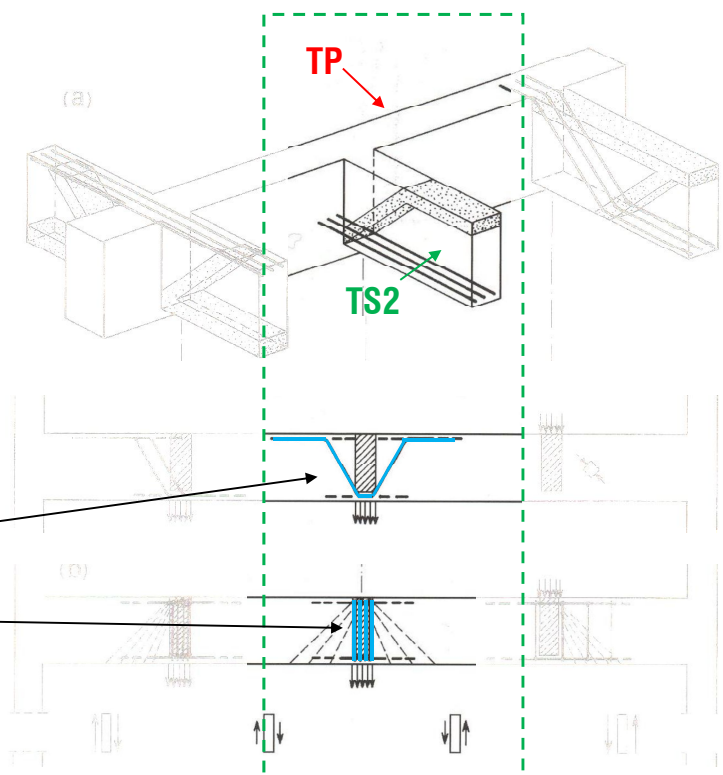
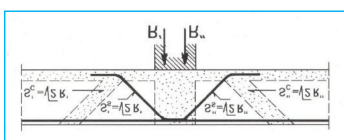
L'assenza di **ferri piegati** nella trave **TS2** NON consente il trasferimento efficace della reazione in al lembo superiore della trave **TP**

È pertanto necessario introdurre nella trave **TP** idonee **armature**, in modo da «appendere» la **TS2**

Queste armature possono essere costituite da:

ferri piegati o
staffe ravvicinate

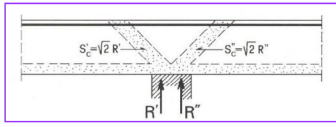
Analogia con



CASO 3

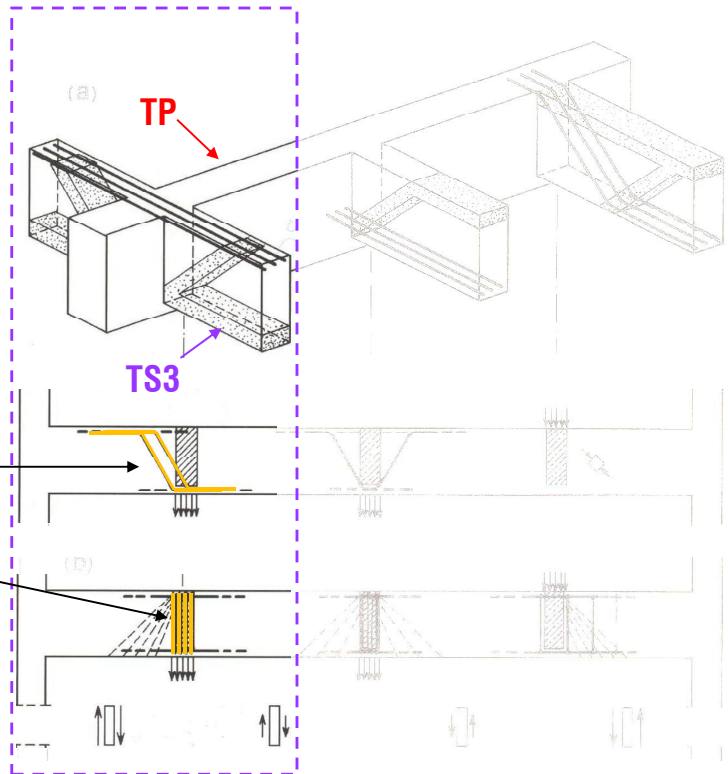
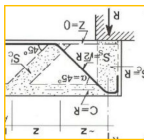
Analogo ragionamento vale per l'appoggio di continuità della trave portata **TS3** (priva di ferri piegati) sulla trave portante **TP**

Analogia con



Per assorbire le compressioni dei puntoni inclinati che la **TS3** scarica sulla **TP** sono necessarie **armature integrative** nella **TP** costituite da: **ferri piegati** o **staffe ravvicinate**

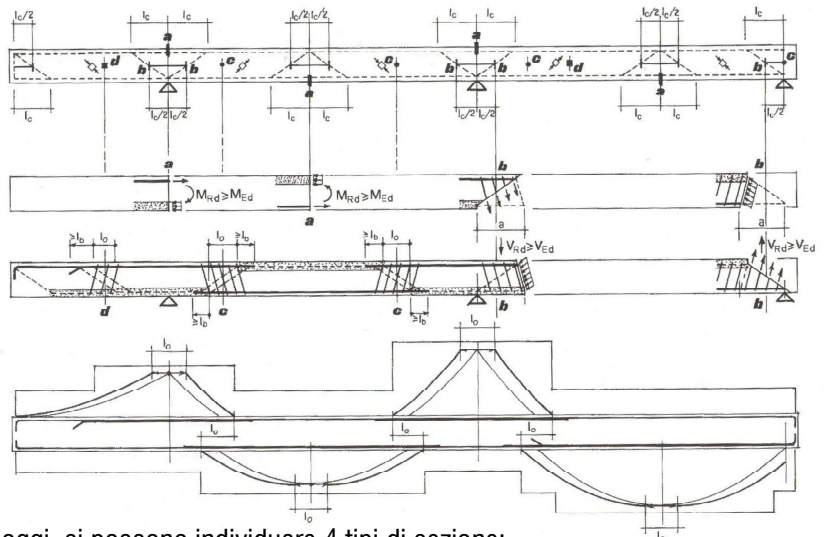
Analogia con



MODELLO DI CALCOLO per le TRAVI INFLESSE CON ARMATURA D'ANIMA

Nelle travi con armature d'anima si è visto che il modello fondamentale per il taglio è il **MODELLO A TRALICCIO**, costituito da due correnti longitudinali (teso e compresso), puntoni inclinati di calcestruzzo e armatura d'anima.

Si vuole estendere l'analisi all'intera trave in c.a. a più campate, in cui il diagramma del taglio non è costante.



Nella generica trave continua su più appoggi, si possono individuare 4 tipi di sezione:

- **Tipo a:** sezioni soggette a momento massimo $M_{Ed} < M_{Rd}$
- **Tipo b:** sezioni soggette a taglio massimo $V_{Ed} < V_{Rd}$
- **Tipo c:** sezioni al centro delle zone di cambiamento di segno del momento
- **Tipo d:** sezioni soggette a taglio e momento diversi da zero

Le verifiche **a** e **b** sistemano la sovrappos. delle armature per **c**

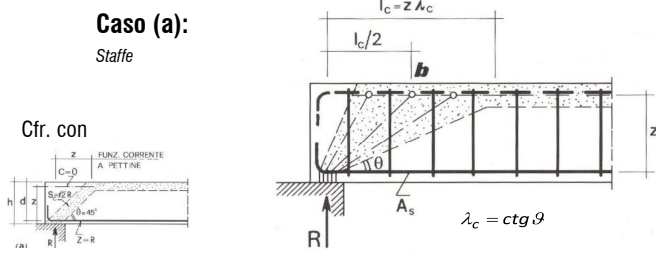
Verifiche **M** e **V** in **d**, se variano armatura o sezione



Particolari d'appoggio (zone di diffusione)

Le zone di diffusione (in prossimità degli appoggi) devono essere verificate con equilibri locali che si basano su **scemi a tirante-puntone**.

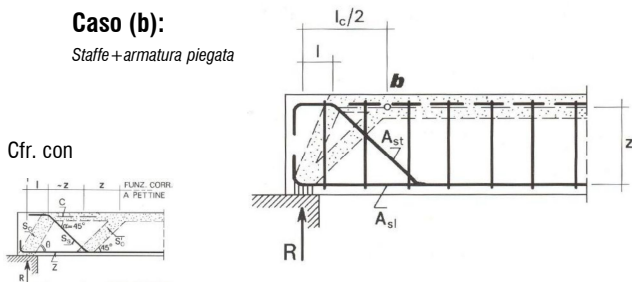
Rispetto al caso senza armatura d'anima, le armature longitudinali confinano il calcestruzzo conferendo maggiore resistenza a taglio e **diffondendo più rapidamente** gli sforzi.



Distribuzione «a ventaglio» entro la zona di diffusione.

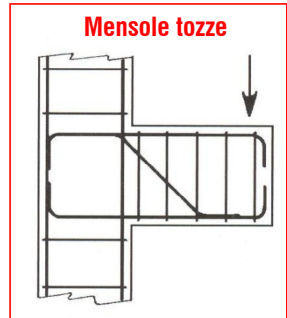
Man mano che ci si allontana dall'appoggio l'inclinazione dei puntoni compressi di cls aumenta e tende a stabilizzarsi secondo l'angolo di inclinazione del puntone nelle zone indisturbate (v. lezione sul Taglio)

Analogamente anche negli appoggi di continuità.



Sovrapposizione del contributo staffe (sopra) e armatura piegata (visto prima)

Analogamente anche negli appoggi di continuità.



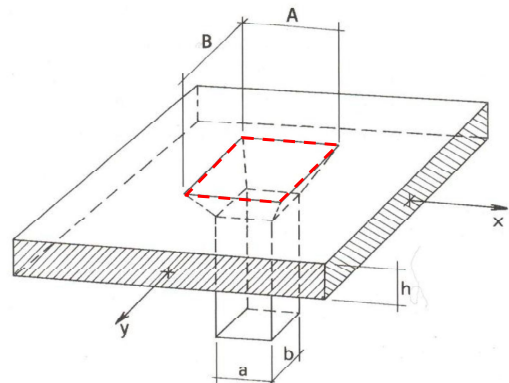
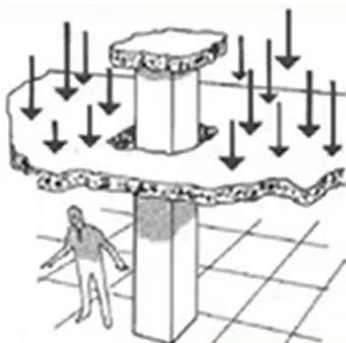
IL PUNZONAMENTO

I particolari di appoggio di elementi a piastra su pilastri costituiscono un problema di flessione bidirezionale. Si hanno dei flussi di tensioni che si convogliano entro le dimensioni ridotte del pilastro.

La ridotta dimensione del pilastro può portare alla rottura della piastra in prossimità dell'appoggio con perforazione. Questo fenomeno è chiamato **punzonamento**.

Per la verifica a punzonamento, le norme propongono un calcolo convenzionale basato sulle **formule di resistenza a taglio** dedotte per il caso monodimensionale delle travi, previa la definizione di un **perimetro critico** lungo il quale distribuire la resistenza.

Il perimetro critico è quello che **delimita superiormente la superficie di rottura**, così come evidenziata dalla sperimentazione (rottura di forma tronco-piramidale con base minore axb e base maggiore AxB).



Senza specifica armatura a taglio

L'angolo di inclinazione della fessura è tale che

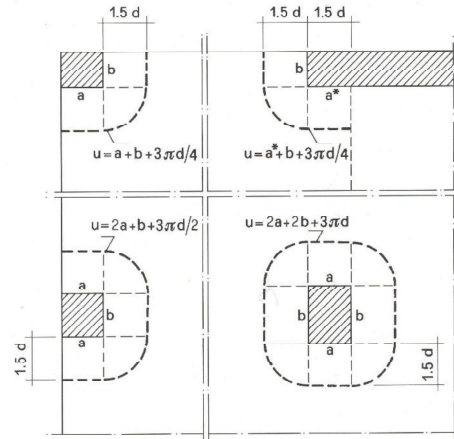
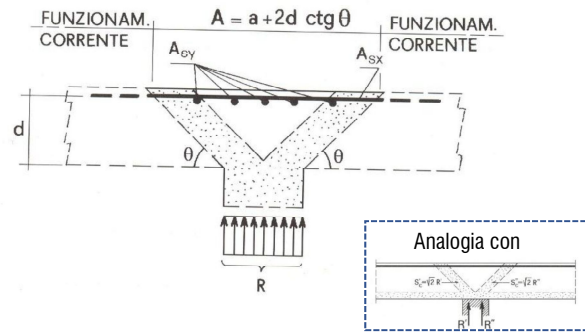
$$A = a + 2d\lambda \approx a + 3d$$

$$B = b + 2d\lambda \approx b + 3d$$

$$\lambda = \text{ctg}\vartheta \approx 1.5 \quad (\text{cioè } \vartheta \approx 34^\circ)$$

Nelle verifiche si fa riferimento ad una **distribuzione uniforme** delle sollecitazioni lungo il perimetro critico.

In realtà il perimetro critico viene definito come indicato nelle figure, dove si evidenzia che non ci sono spigoli vivi ma si hanno dei **raccordi circolari**.



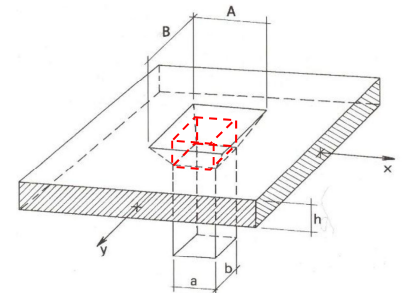
La verifica a punzonamento si articola in 2 parti:

- Verifica lungo il **perimetro d'appoggio** $u_o = 2a + 2b$ con resistenza basata sul **meccanismo ad arco** (cfr. slide 10)

$$R_{RC} = 0.4d \underline{u_o} f_{cd} \frac{1}{1 + \lambda^2} = 0.123d u_o f_{cd}$$

$$\lambda = \text{ctg}\vartheta \approx 1.5$$

$\sin^2\theta$



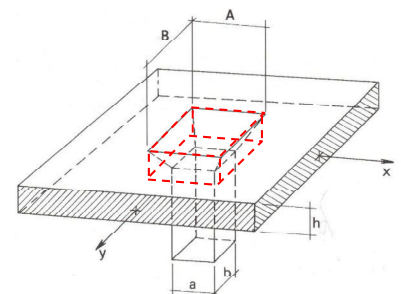
- Verifica lungo il **perimetro critico** $u = 2a + 2b + 3\pi d$ con resistenza basata sul **meccanismo a pettine** (cfr. lezione sul Taglio)

$$V_{ctd} = R_{Rd} = 0.25d \underline{u} f_{ctd} \kappa(1 + 50\rho_s)$$

$$\kappa = 1.6 - d \geq 1.0$$

$$\rho_s = \sqrt{\rho_{sx} \rho_{sy}} \leq 0.02 \quad \rho_{sx} = A_{sx} / Bd$$

$$\rho_{sy} = A_{sy} / Ad$$

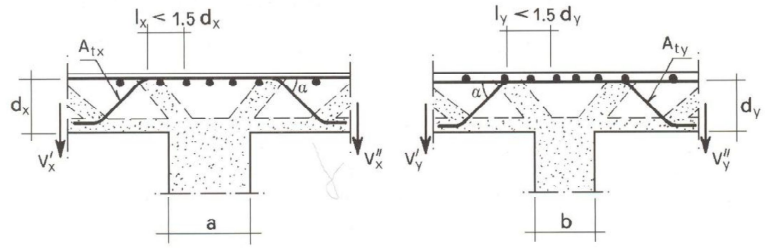
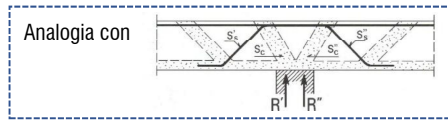


Le più recenti normative forniscono la relazione empirica:

$$V_{ctd} = 0.18d \underline{u} \kappa (100\rho_s f_{ck})^{1/3} / \gamma_c \geq u d v_{\min}$$

Con specifica armatura a taglio

Ci si comporta analogamente alle travi, ma nelle due direzioni



La presenza dei ferri piegati aumenta sensibilmente il nuovo perimetro critico, dove in genere **non risulta più dominante la verifica basata sul meccanismo a pettine**.

Le verifiche sono ora concentrate sull'acciaio dei ferri piegati e sui puntoni compressi di calcestruzzo (su ognuno dei 4 lati) – (cfr. slide 15, caso b)

Cedimento a trazione
barre piegate

$$R'_{xd} = A_{tx} f_{yd} \sin \alpha > \alpha'_x R_{Ed}$$

Cedimento a compressione
puntone di calcestruzzo

$$R'_{xc} = 0.4 b d_x f_{cd} \frac{l}{1 + \lambda_x^2} > \alpha'_x R_{Ed}$$

$$\lambda_x = l_x / 0.9 d_x$$

α'_x = quota di reazione che compete al lato interessato del sostegno.



Il problema del punzonamento nelle travi in spessore di solaio

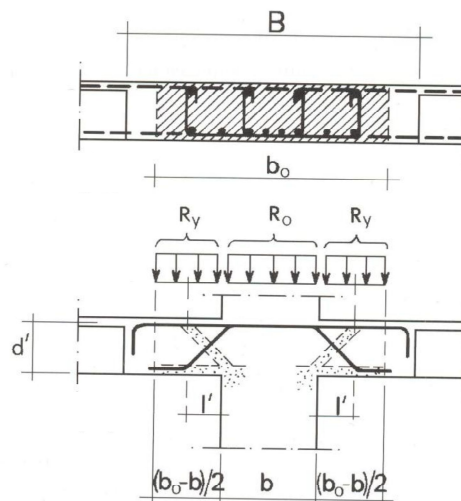
Un caso frequente di problema a punzonamento è quello relativo alle travi realizzate in spessore di solaio. Si tratta di una flessione sostanzialmente monodirezionale in un elemento piano di notevole larghezza, che trova sostegno su pilastri di dimensioni molto più ridotte.

In questo caso, in realtà, il problema si affronta diversamente:

- si eseguono le **verifiche a taglio nella direzione della trave** (come già visto per le travi armate a taglio);
- si esegue poi una verifica trasversale considerando le **sporgenze della trave come fossero delle mensole tozze**.

La quota parte di forza R_y da considerare agente sulla mensola è proporzionale alla dimensione della mensola:

$$R_y = \frac{b_o - b}{2b_o} R$$



Bibliografia

- Toniolo G., Di Prisco M., “Cemento Armato – Calcolo agli stati limite”, Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.
- Park R., Paulay T., “Reinforced Concrete Structures”, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- Mac Gregor J., “Reinforced Concrete – Mechanics and Design”, Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- Santarella L., “Prontuario del Cemento Armato”, XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.

