

ESERCITAZIONE 03 CALCOLO DELLE TRAVI

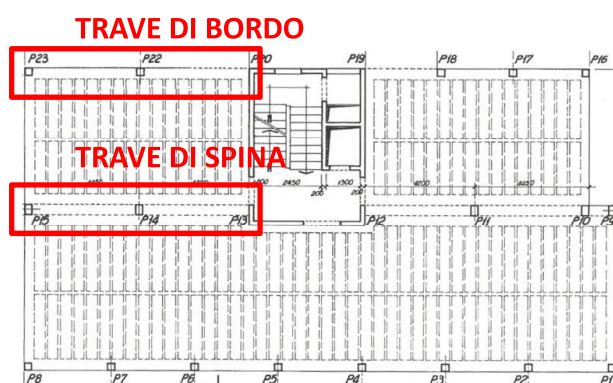
E03

A. A. 2025-2026
Corso di Tecnica delle costruzioni

Esercitazione 03 – Calcolo delle travi

ANALISI DELLE SOLLECITAZIONI: COMBINAZIONI DI CARICO

tav. 1 PIANTA PIANO TIPO



Ci si riferisce alla trave di spina TR_15-13 e alla trave di bordo TR_23-20, entrambe costituite da due campate di luci pari a 4,45 m e 4,2 m.

Dall'analisi dei carichi sui solai di interpiano:

-	Permanenti strutturali (solaio in laterocemento 24+5)	G_1	3,30	kN/m^2
-	Permanenti non strutturali (massetto 0,56 + pavimento 0,40 + intonaco 0,30 + tramezzi ripartiti 1,60 kN/m^2)	G_2	2,86	kN/m^2
-	Accidentali (carico di affollamento)	Q_k	2,00	kN/m^2

I carichi per metro lineare di trave sono, pertanto:

TRAVE DI SPINA

- $g_{k1} \ 3,30 \text{ kN/m}^2 * (5,20/2 + 6,00/2) \text{ m} * 1,25 = 23,10 \text{ kN/m}$

- $g_{k2} \ 2,86 \text{ kN/m}^2 * (5,20/2 + 6,00/2) \text{ m} * 1,25 = 20,03 \text{ kN/m}$

- $q_{1k} \ 2,00 \text{ kN/m}^2 * (5,20/2 + 6,00/2) \text{ m} * 1,25 = 14,00 \text{ kN/m}$

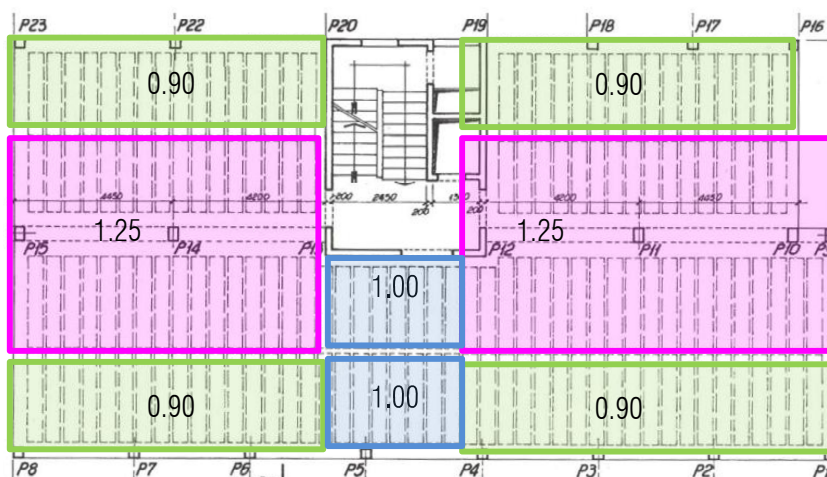
TRAVE DI BORDO

- $g_{k1} \ 3,30 \text{ kN/m}^2 * (5,20/2) \text{ m} * 0,90 = 7,73 \text{ kN/m}$

- $g_{k2} \ 2,86 \text{ kN/m}^2 * (5,20/2) \text{ m} * 0,90 = 6,70 \text{ kN/m}$

- $q_{1k} \ 2,00 \text{ kN/m}^2 * (5,20/2) \text{ m} * 0,90 = 4,68 \text{ kN/m}$

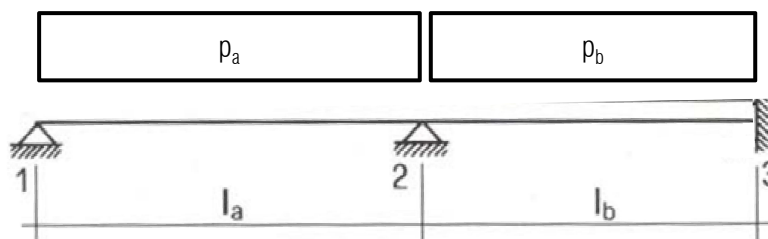
Analogamente a quanto fatto per i pilastri, anche per il pre-dimensionamento delle travi si può eseguire un procedimento approssimato che si basa sulla scomposizione della pianta d'impalcato in aree di influenza.



Una trave può essere schematizzata tramite un'asta vincolata in corrispondenza dei pilastri o delle pareti di controvento.

La scelta del tipo di vincolo dipende dalla rigidità torsionale di queste due tipologie di elementi strutturali verticali: in genere, per semplicità, si adotta un vincolo di appoggio in corrispondenza delle travi e un vincolo di incastro per i setti.

Per la trave in esame: si è ipotizzato il seguente schema statico (trave a due campate semplicemente appoggiata in corrispondenza dei pilastri e incastrata in corrispondenza del setto di controvento).

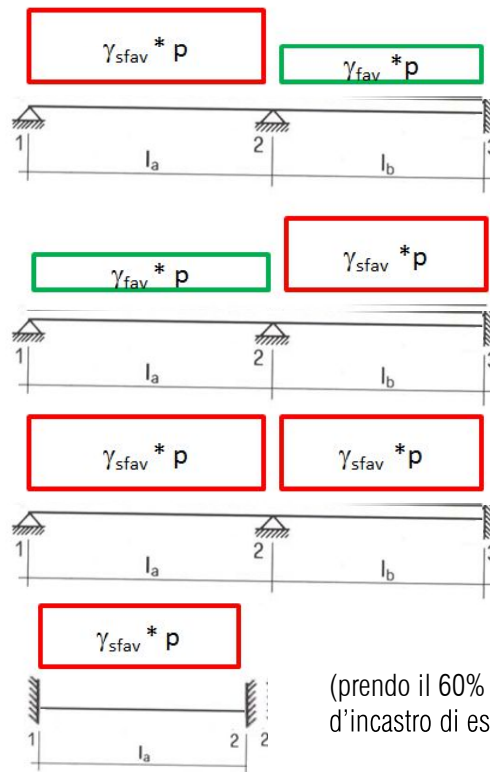


Nelle travi, come nei solai, per trovare le **massime sollecitazioni a momento e a taglio**, è pertanto necessario considerare diverse **combinazioni di carico**, per tenere in conto che l'entità dei carichi può risultare variata da una campata all'altra rispetto al valore calcolato.

Questa variabilità dei carichi rispetto al valore calcolato viene tenuta in conto attraverso dei coefficienti amplificativi (γ_{sfav}) e riduttivi (γ_{sfav}) (sono gli stessi visti per i solai).

Combinazioni di carico:

- **COMBINAZIONE 1**
(per massimizzare il momento in campata a)
- **COMBINAZIONE 2**
(per massimizzare il momento in campata b)
- **COMBINAZIONE 3**
(per massimizzare il momento all'appoggio 2)
- **COMBINAZIONE 4**
(solo per l'estremità appoggiata, per massimizzare il momento all'appoggio 1)



(prendo il 60% del momento d'incastro di estremità)

ALLO STATO LIMITE ULTIMO

Per la trave di spina si ha pertanto che:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{sfav}^* p &= \gamma_{sfav,G1}^* g_1 + \gamma_{sfav,G2}^* g_2 + \gamma_{sfav,Qk}^* q_k \\
 &= 1,30 \cdot 23,10 \text{ kN/m} + 1,50 \cdot 20,03 \text{ kN/m} + 1,50 \cdot 14,00 \text{ kN/m} \\
 &= 30,03 \text{ kN/m} + 30,05 \text{ kN/m} + 21,00 \text{ kN/m} \\
 &= \mathbf{81,08 \text{ kN/m}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{fav}^* p &= \gamma_{fav,G1}^* g_1 + \gamma_{fav,G2}^* g_2 + \gamma_{fav,Qk}^* q_k \\
 &= 1,00 \cdot 23,10 \text{ kN/m} + 0,80 \cdot 20,03 \text{ kN/m} + 0,00 \cdot 14,00 \text{ kN/m} \\
 &= 23,10 \text{ kN/m} + 16,20 \text{ kN/m} + 0,00 \text{ kN/m} \\
 &= \mathbf{39,12 \text{ kN/m}}
 \end{aligned}$$

Per la trave di bordo si ha pertanto che:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{sfav}^* p &= \gamma_{sfav,G1}^* g_1 + \gamma_{sfav,G2}^* g_2 + \gamma_{sfav,Qk}^* q_k \\
 &= 1,30 \cdot 7,73 \text{ kN/m} + 1,50 \cdot 6,70 \text{ kN/m} + 1,50 \cdot 4,68 \text{ kN/m} \\
 &= 10,05 \text{ kN/m} + 10,04 \text{ kN/m} + 7,02 \text{ kN/m} \\
 &= \mathbf{27,12 \text{ kN/m}}
 \end{aligned}$$

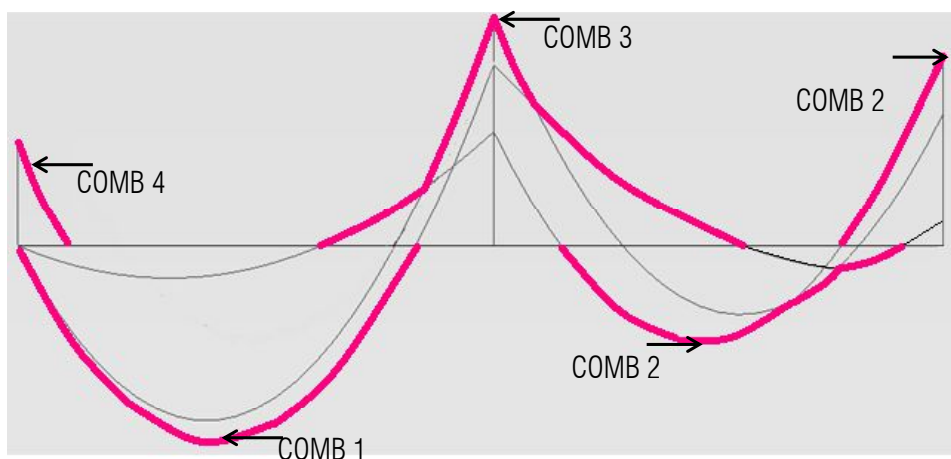
$$\begin{aligned}
 \gamma_{fav}^* p &= \gamma_{fav,G1}^* g_1 + \gamma_{fav,G2}^* g_2 + \gamma_{fav,Qk}^* q_k \\
 &= 1,00 \cdot 7,73 \text{ kN/m} + 0,80 \cdot 6,70 \text{ kN/m} + 0,00 \cdot 4,68 \text{ kN/m} \\
 &= 7,73 \text{ kN/m} + 5,36 \text{ kN/m} + 0,00 \text{ kN/m} \\
 &= \mathbf{13,09 \text{ kN/m}}
 \end{aligned}$$

MOMENTI - Trave di spina TR_15-13

	$M_{max,1}^-$	$M_{max,a}^+$	$M_{max,2}^-$	$M_{max,b}^+$	$M_{max,3}^-$
COMB 1	0,0	136,2	-141,3	19,3	-15,6
COMB 2	0,0	51,04	-106,1	63,0	-125,7
COMB 3	0,0	125,9	-166,9	49,4	-95,3
COMB 4	-80,3	/	/	/	/

MOMENTI - Trave di bordo TR_23-20

	$M_{max,1}^-$	$M_{max,a}^+$	$M_{max,2}^-$	$M_{max,b}^+$	$M_{max,3}^-$
COMB 1	0,0	45,6	-47,3	6,4	-5,2
COMB 2	0,0	17,1	-35,5	21,1	-42,1
COMB 3	0,0	42,1	-55,8	16,5	-31,9
COMB 4	-26,9	/	/	/	/

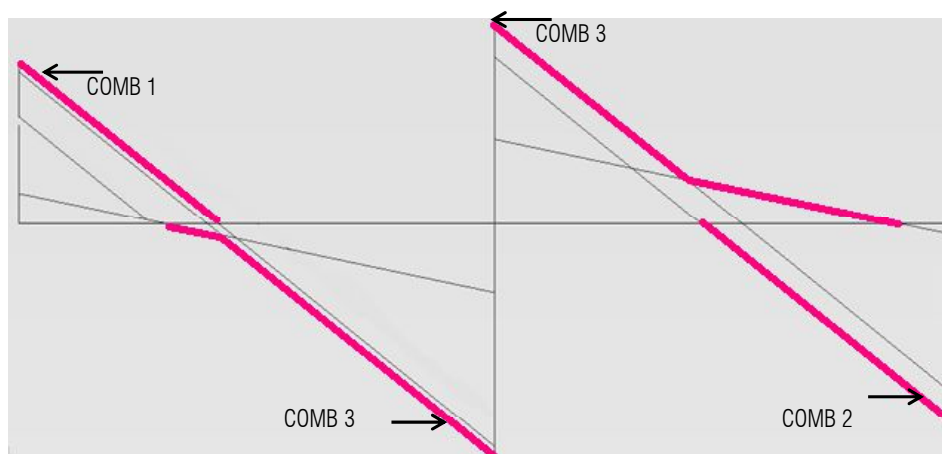


TRAVI - Trave di spina TR_15-13

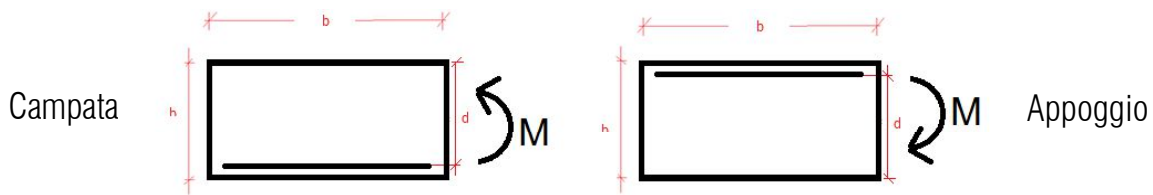
	V_1	$V_{2(a)}$	$V_{2(b)}$	V_3
COMB 1	148,6	-212,2	112,1	-52,2
COMB 2	63,2	-110,9	165,6	-174,9
COMB 3	142,9	-217,9	187,3	-153,2
COMB 4	108,2	/	/	/

TRAVI - Trave di bordo TR_23-20

	V_1	$V_{2(a)}$	$V_{2(b)}$	V_3
COMB 1	49,7	-71,0	37,5	-17,5
COMB 2	21,2	-37,1	55,4	-58,5
COMB 3	47,8	-72,9	62,7	-51,3
COMB 4	36,2	/	/	/



DIMENSIONAMENTO



Note le sollecitazioni, è necessario stabilire le dimensioni della sezione delle travi e dimensionare l'armatura tesa A_s , attraverso le equazioni

PER LE TRAVI DI SPINA, se in spessore di solaio, le incognite sono A_s e la larghezza della sezione b (l'altezza è fissata pari allo spessore del solaio strutturale).

La larghezza delle travi in spessore di solaio per campate fino a 5-6 m varia, mediamente, da 700 a 1000 mm

Per l'esempio in esame, ipotizzo $b = 750$ mm

PER LE TRAVI DI BORDO, le incognite sono A_s e l'altezza della sezione h (la larghezza è fissata pari a quella dei pilastri perimetrali).

Per l'esempio in esame, ipotizzo $h = 300$ mm

Trave di spina TR_15-13

Campata A $A_{s,min} = \frac{136200000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{0,9\cdot243 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa}} = 1592,8 \text{ mm}^2$

con **8 ϕ 18** si ha $A_s^* = 8 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 18^2}{4}\right) = 2035,8 > 1592,8 \text{ mm}^2$

Campata B $A_{s,min} = \frac{63000000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{0,9\cdot243 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa}} = 736,7 \text{ mm}^2$

con **5 ϕ 18** si ha $A_s^* = 5 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 18^2}{4}\right) = 1272,3 \text{ mm}^2 > 736,7 \text{ mm}^2$

Appoggio 2 $A_{s,min} = \frac{166900000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{0,9\cdot243 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa}} = 1951,8 \text{ mm}^2$

con **10 ϕ 18** si ha $A_s^* = 10 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 18^2}{4}\right) = 2544,7 \text{ mm}^2 > 1951,8 \text{ mm}^2$

Appoggio 1 $A_{s,min} = \frac{80300000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{0,9\cdot243 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa}} = 938,8 \text{ mm}^2$

con **5 ϕ 18** si ha $A_s^* = 5 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 18^2}{4}\right) = 1272,3 \text{ mm}^2 > 938,8 \text{ mm}^2$

Appoggio 3 $A_{s,min} = \frac{125700000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{0,9\cdot243 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa}} = 1470,0 \text{ mm}^2$

con **9 ϕ 18** si ha $A_s^* = 9 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 18^2}{4}\right) = 2290,2 \text{ mm}^2 > 1470,0 \text{ mm}^2$

OSS. d sarà pari all'altezza del solaio strutturale (240+50 mm) diminuita del copriferro netto (30 mm), del diametro delle staffe (8mm) del raggio delle armature (9 mm)

Trave di bordo TR_23-20

$$\text{Campata A} \quad A_{s,min} = \frac{45600000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{0,9 \cdot 253 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa}} = 511,8 \text{ mm}^2$$

$$\text{con } 3\phi 18 \text{ si ha } A_s^* = 3 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 18^2}{4} \right) = 763,4 \text{ mm}^2 > 511,8 \text{ mm}^2$$

$$\text{Campata B} \quad A_{s,min} = \frac{21100000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{0,9 \cdot 253 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa}} = 236,7 \text{ mm}^2$$

$$\text{con } 2\phi 18 \text{ si ha } A_s^* = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 18^2}{4} \right) = 508,9 \text{ mm}^2 > 236,7 \text{ mm}^2$$

$$\text{Appoggio 2} \quad A_{s,min} = \frac{55800000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{0,9 \cdot 253 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa}} = 626,1 \text{ mm}^2$$

$$\text{con } 3\phi 18 \text{ si ha } A_s^* = 3 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 18^2}{4} \right) = 763,4 \text{ mm}^2 > 626,1 \text{ mm}^2$$

$$\text{Appoggio 1} \quad A_{s,min} = \frac{26900000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{0,9 \cdot 253 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa}} = 301,6 \text{ mm}^2$$

$$\text{con } 2\phi 18 \text{ si ha } A_s^* = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 18^2}{4} \right) = 508,9 \text{ mm}^2 > 301,6 \text{ mm}^2$$

$$\text{Appoggio 3} \quad A_{s,min} = \frac{42100000 \text{ N}\cdot\text{mm}}{0,9 \cdot 253 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa}} = 472,3 \text{ mm}^2$$

$$\text{con } 3\phi 18 \text{ si ha } A_s^* = 3 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 18^2}{4} \right) = 763,4 \text{ mm}^2 > 472,3 \text{ mm}^2$$

OSS. d sarà pari all'altezza della trave (ipotizzo 300mm) diminuita del copriferro netto (30 mm), del diametro delle staffe (8mm) del raggio delle armature (9 mm)

VERIFICHE SLU - Flessione

Bisogna verificare che i momenti resistenti M_{Rd} relativi alle armature scelte siano superiori ai momenti sollecitanti M_{Sd} :

$$M_{Rd} = A_s^* \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{yd} > M_{Sd}$$

Trave di spina TR_15-13

$$\text{Campata A} \quad M_{Rd} = 2035,8 \text{ mm}^2 \cdot 0,9 \cdot 243 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa} = 174080618 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$= 174,1 \text{ kN}\cdot\text{m} > 136,2 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \checkmark \text{ VERIFICATO}$$

$$\text{Campata B} \quad M_{Rd} = 1272,3 \text{ mm}^2 \cdot 0,9 \cdot 243 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa} = 108800386 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$= 108,8 \text{ kN}\cdot\text{m} > 63,0 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \checkmark \text{ VERIFICATO}$$

$$\text{Appoggio 2} \quad M_{Rd} = 2544,7 \text{ mm}^2 \cdot 0,9 \cdot 243 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa} = 217600772 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$= 217,6 \text{ kN}\cdot\text{m} > 166,90 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \checkmark \text{ VERIFICATO}$$

$$\text{Appoggio 1} \quad M_{Rd} = 1272,3 \text{ mm}^2 \cdot 0,9 \cdot 243 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa} = 108800386 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$= 108,8 \text{ kN}\cdot\text{m} > 80,3 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \checkmark \text{ VERIFICATO}$$

$$\text{Appoggio 3} \quad M_{Rd} = 2290,2 \text{ mm}^2 \cdot 0,9 \cdot 243 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa} = 195840695 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$= 195,8 \text{ kN}\cdot\text{m} > 125,70 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \checkmark \text{ VERIFICATO}$$

Bisogna inoltre verificare che il collasso avvenga con l'armatura tesa snervata (collasso duttile). La verifica può essere effettuata verificando che

$$\omega_s = \frac{f_{yd} \cdot A_s^*}{f_{cd} \cdot b \cdot d} < \bar{\omega}_s = 0,52$$

Trave di spina TR_15-13

Campata A $\omega_s = \frac{391 \text{ MPa} \cdot 2035,8 \text{ mm}^2}{14,17 \text{ MPa} \cdot 750 \text{ mm} \cdot 243 \text{ mm}} = 0,31 < \bar{\omega}_s = 0,52$ ✓ VERIFICATO

Campata B $\omega_s = \frac{391 \text{ MPa} \cdot 1272,3 \text{ mm}^2}{14,17 \text{ MPa} \cdot 750 \text{ mm} \cdot 243 \text{ mm}} = 0,19 < \bar{\omega}_s = 0,52$ ✓ VERIFICATO

Appoggio 2 $\omega_s = \frac{391 \text{ MPa} \cdot 2544,7 \text{ mm}^2}{14,17 \text{ MPa} \cdot 750 \text{ mm} \cdot 243 \text{ mm}} = 0,39 < \bar{\omega}_s = 0,52$ ✓ VERIFICATO

Appoggio 1 $\omega_s = \frac{391 \text{ MPa} \cdot 1272,3 \text{ mm}^2}{14,17 \text{ MPa} \cdot 750 \text{ mm} \cdot 243 \text{ mm}} = 0,19 < \bar{\omega}_s = 0,52$ ✓ VERIFICATO

Appoggio 3 $\omega_s = \frac{391 \text{ MPa} \cdot 2290,2 \text{ mm}^2}{14,17 \text{ MPa} \cdot 750 \text{ mm} \cdot 243 \text{ mm}} = 0,35 < \bar{\omega}_s = 0,52$ ✓ VERIFICATO

Trave di bordo TR_23-20

Campata A $M_{Rd} = 763,4 \text{ mm}^2 \cdot 0,9 \cdot 253 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa} = 67966661 \text{ N} \cdot \text{mm}$
 $= 68,0 \text{ kN} \cdot \text{m} > 45,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ✓ VERIFICATO

$$\omega_s = \frac{391 \text{ MPa} \cdot 763,4 \text{ mm}^2}{14,17 \text{ MPa} \cdot 300 \text{ mm} \cdot 253 \text{ mm}} = 0,28 < \bar{\omega}_s = 0,52$$
 ✓ VERIFICATO

Campata B $M_{Rd} = 508,9 \text{ mm}^2 \cdot 0,9 \cdot 253 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa} = 45311107 \text{ N} \cdot \text{mm}$
 $= 45,3 \text{ kN} \cdot \text{m} > 21,1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ✓ VERIFICATO

$$\omega_s = \frac{391 \text{ MPa} \cdot 508,9 \text{ mm}^2}{14,17 \text{ MPa} \cdot 300 \text{ mm} \cdot 253 \text{ mm}} = 0,19 < \bar{\omega}_s = 0,52$$
 ✓ VERIFICATO

Appoggio 2 $M_{Rd} = 763,4 \text{ mm}^2 \cdot 0,9 \cdot 253 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa} = 67966661 \text{ N} \cdot \text{mm}$
 $= 68,0 \text{ kN} \cdot \text{m} > 55,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ✓ VERIFICATO

$$\omega_s = \frac{391 \text{ MPa} \cdot 763,4 \text{ mm}^2}{14,17 \text{ MPa} \cdot 300 \text{ mm} \cdot 253 \text{ mm}} = 0,28 < \bar{\omega}_s = 0,52$$
 ✓ VERIFICATO

Appoggio 1 $M_{Rd} = 508,9 \text{ mm}^2 \cdot 0,9 \cdot 253 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa} = 45311107 \text{ N} \cdot \text{mm}$
 $= 45,3 \text{ kN} \cdot \text{m} > 26,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ✓ VERIFICATO

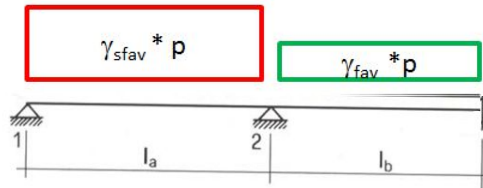
$$\omega_s = \frac{391 \text{ MPa} \cdot 508,9 \text{ mm}^2}{14,17 \text{ MPa} \cdot 300 \text{ mm} \cdot 253 \text{ mm}} = 0,19 < \bar{\omega}_s = 0,52$$
 ✓ VERIFICATO

Appoggio 3 $M_{Rd} = 763,4 \text{ mm}^2 \cdot 0,9 \cdot 253 \text{ mm} \cdot 391 \text{ MPa} = 67966661 \text{ N} \cdot \text{mm}$
 $= 68,0 \text{ kN} \cdot \text{m} > 42,1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ✓ VERIFICATO

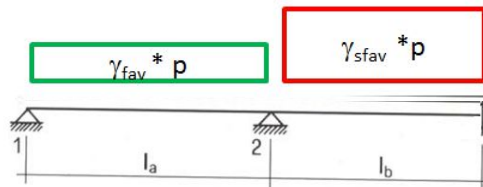
$$\omega_s = \frac{391 \text{ MPa} \cdot 763,4 \text{ mm}^2}{14,17 \text{ MPa} \cdot 300 \text{ mm} \cdot 253 \text{ mm}} = 0,28 < \bar{\omega}_s = 0,52$$
 ✓ VERIFICATO

COMBINAZIONI DI CARICO SLE

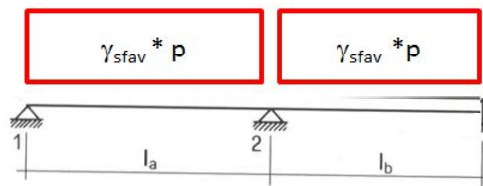
- **COMBINAZIONE 1**
(per massimizzare il momento in campata a)



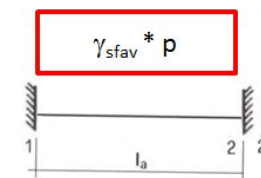
- **COMBINAZIONE 2**
(per massimizzare il momento in campata b)



- **COMBINAZIONE 3**
(per massimizzare il momento all'appoggio 2)



- **COMBINAZIONE 4**
(solo per estremità appoggiata, per massimizzare il momento all'appoggio 1)



(prendo il 60% del momento d'incastro di estremità)

ALLO STATO LIMITE DI ESERCIZIO

Per la trave di spina si ha pertanto che:

$$\begin{aligned}\gamma_{sfav} * p &= \gamma_{sfav,G1} * g_1 + \gamma_{sfav,G2} * g_2 + \gamma_{sfav,Qk} * q_k \\ &= 1,00 * 23,10 \text{ kN/m} + 1,00 * 20,03 \text{ kN/m} + 1,00 * 14,00 \text{ kN/m} \\ &= 23,10 \text{ kN/m} + 20,03 \text{ kN/m} + 14,00 \text{ kN/m} \\ &= \mathbf{57,13 \text{ kN/m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{fav} * p &= \gamma_{fav,G1} * g_1 + \gamma_{fav,G2} * g_2 + \gamma_{fav,Qk} * q_k \\ &= 1,00 * 23,10 \text{ kN/m} + 0,80 * 20,03 \text{ kN/m} + 0,00 * 14,00 \text{ kN/m} \\ &= 23,10 \text{ kN/m} + 16,02 \text{ kN/m} + 0,00 \text{ kN/m} \\ &= \mathbf{39,12 \text{ kN/m}}\end{aligned}$$

Per la trave di bordo si ha pertanto che:

$$\begin{aligned}\gamma_{sfav} * p &= \gamma_{sfav,G1} * g_1 + \gamma_{sfav,G2} * g_2 + \gamma_{sfav,Qk} * q_k \\ &= 1,00 * 7,73 \text{ kN/m} + 1,00 * 6,70 \text{ kN/m} + 1,00 * 4,68 \text{ kN/m} \\ &= 7,73 \text{ kN/m} + 6,70 \text{ kN/m} + 4,68 \text{ kN/m} \\ &= \mathbf{19,11 \text{ kN/m}}\end{aligned}$$

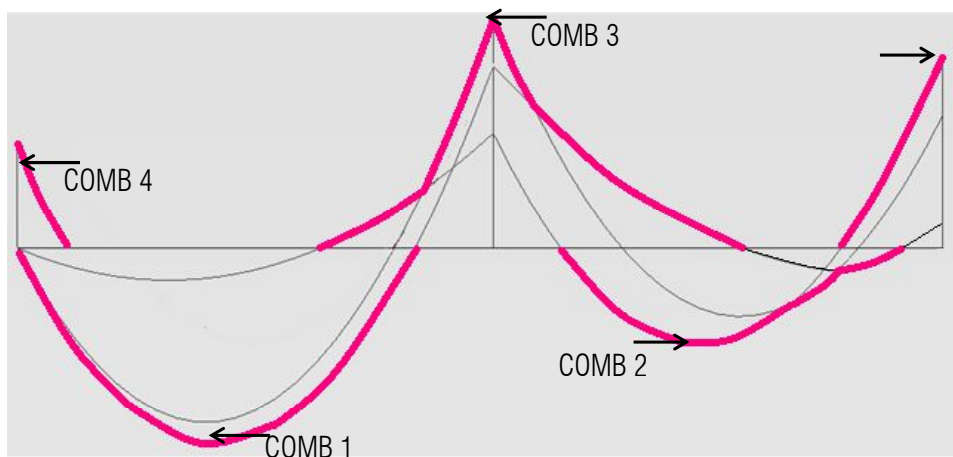
$$\begin{aligned}\gamma_{fav} * p &= \gamma_{fav,G1} * g_1 + \gamma_{fav,G2} * g_2 + \gamma_{fav,Qk} * q_k \\ &= 1,00 * 7,73 \text{ kN/m} + 0,00 * 6,70 \text{ kN/m} + 0,00 * 4,68 \text{ kN/m} \\ &= 7,73 \text{ kN/m} + 0,00 \text{ kN/m} + 0,00 \text{ kN/m} \\ &= 7,73 \text{ kN/m} + 5,36 \text{ kN/m} + 0,00 \text{ kN/m} \\ &= \mathbf{13,09 \text{ kN/m}}\end{aligned}$$

MOMENTI - Trave di spina TR_15-13

	M ⁻ _{max,1}	M ⁺ _{max,a}	M ⁻ _{max,2}	M ⁺ _{max,b}	M ⁻ _{max,3}
COMB 1	0,0	93,1	-106,6	20,4	-32,9
COMB 2	0,0	56,5	-91,5	40,2	-80,2
COMB 3	0,0	88,7	-117,6	34,9	-67,2
COMB 4	-56,6	/	/	/	/

MOMENTI - Trave di bordo TR_23-20

	M ⁻ _{max,1}	M ⁺ _{max,a}	M ⁻ _{max,2}	M ⁺ _{max,b}	M ⁻ _{max,3}
COMB 1	0,0	31,1	-35,7	6,8	-11,0
COMB 2	0,0	18,9	-30,6	13,4	-26,8
COMB 3	0,0	29,7	-39,3	11,7	22,5
COMB 4	-18,9	/	/	/	/



VERIFICHE SLE - Tensioni

VERIFICA DELLE TENSIONI MASSIME:

- di compressione, nel cls compresso

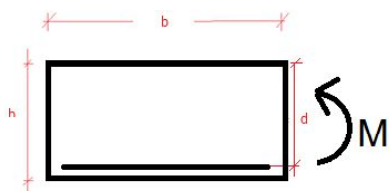
$$\sigma_c = \frac{2M}{bxz} < 0,60 f_{ck} = 15 \text{ MPa}$$

- di trazione, nell'armatura tesa

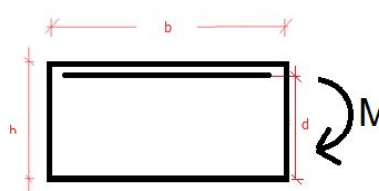
$$\sigma_s = \frac{M}{A_s z} < 0,80 f_{yk} = 360 \text{ MPa}$$

Con $z = d - \frac{x}{3}$ e con $x = \frac{\alpha_e A_s}{b} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2bd}{\alpha_e A_s}} \right\} \alpha_e = 15)$

Campata



Appoggio



Trave di spina TR_15-13

	M [kN·m]	A _s [mm ²]	b [mm]	x [mm]	z [mm]	σ _c [MPa]	< 15 MPa?	σ _s [MPa]	< 360 MPa?
CAMPATA A	93,1	2035,8	750	105,7	207,8	11,30	✓	220,1	✓
CAMPATA B	40,2	1272,3	750	88,6	213,5	5,67	✓	148,0	✓
APPOGGIO 1	56,6	1272,3	750	88,6	213,5	7,97	✓	208,3	✓
APPOGGIO 2	117,6	2544,7	750	114,4	204,9	13,38	✓	225,6	✓
APPOGGIO 3	80,2	2290,2	750	110,3	206,2	9,40	✓	169,8	✓

Trave di bordo TR_23-20

CAMPATA A	31,1	763,4	300	106,0	217,7	8,99	✓	187,1	✓
CAMPATA B	13,4	508,9	300	90,8	222,7	4,42	✓	118,2	✓
APPOGGIO 1	18,9	508,9	300	90,8	222,7	6,23	✓	166,7	✓
APPOGGIO 2	39,3	763,4	300	106,0	217,7	11,36	✓	236,5	✓
APPOGGIO 3	26,8	763,4	300	106,0	217,7	7,75	✓	161,3	✓



VERIFICHE SLE – Fessurazione (indiretta)

La verifica a fessurazione può essere eseguita indirettamente controllando che il diametro delle armature tese e la loro spaziatura non superino determinati limiti.

Tali limiti dipendono dallo stato tensionale delle armature in condizione di esercizio e dall'apertura massima delle fessure consentita (w).

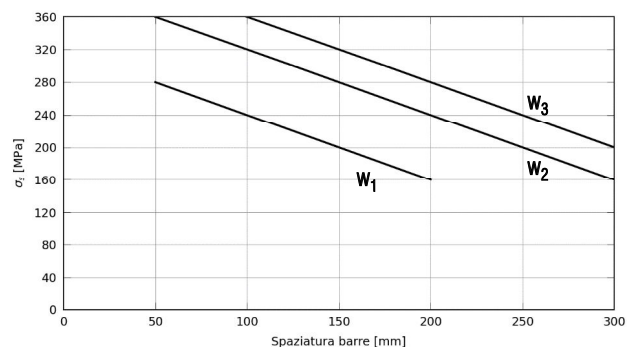
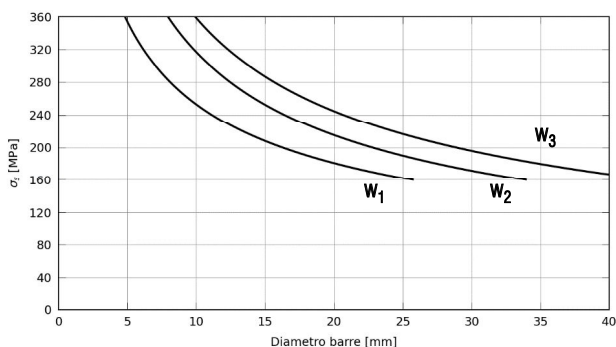
L'apertura massima delle fessure dipende dalle condizioni ambientali cui è esposta la struttura e dalla tipologia di armatura (NTC 2018, §4.1.2.2.4).

Per l'edificio in esempio:

- Condizioni ambientali ordinarie (XC1-XC2-XC3);
- Armature poco sensibili (acciaio ordinario).



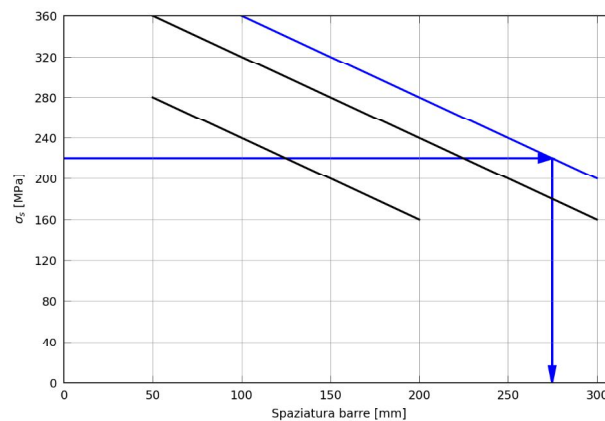
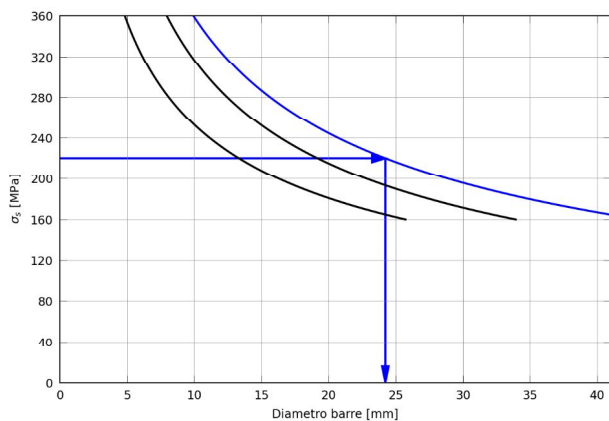
$$w_3 = 0,4 \text{ mm}$$



TRAVE DI SPINA, CAMPATA A

$$8\phi 18, \sigma_s = 220,1 \text{ MPa}$$

$$\text{spaziatura barre } i = (b - 2 \cdot (c + \phi_{st} + \phi_{long}/2)) / (n\phi - 1) = (750 - 2 \cdot (30 + 8 + 18/2)) / (8 - 1) = 94 \text{ mm}$$

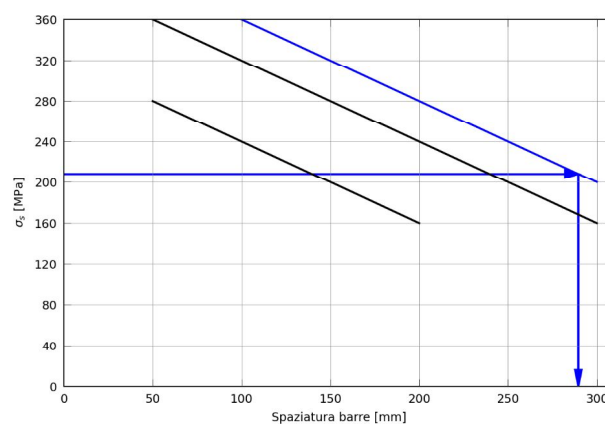
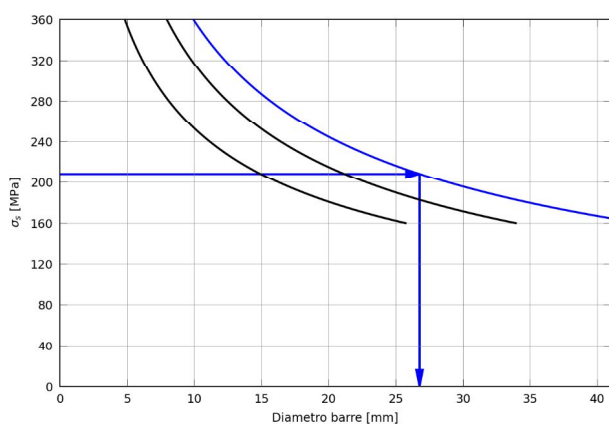


$\phi 18 < \phi 24$ e $94 \text{ mm} < 270 \text{ mm}$ ✓ VERIFICATO

TRAVE DI SPINA, APPOGGIO 1

$$5\phi 18, \sigma_s = 208,3 \text{ MPa}$$

$$\text{spaziatura barre } i = (b - 2 \cdot (c + \phi_{st} + \phi_{long}/2)) / (n\phi - 1) = (750 - 2 \cdot (30 + 8 + 18/2)) / (5 - 1) = 164 \text{ mm}$$

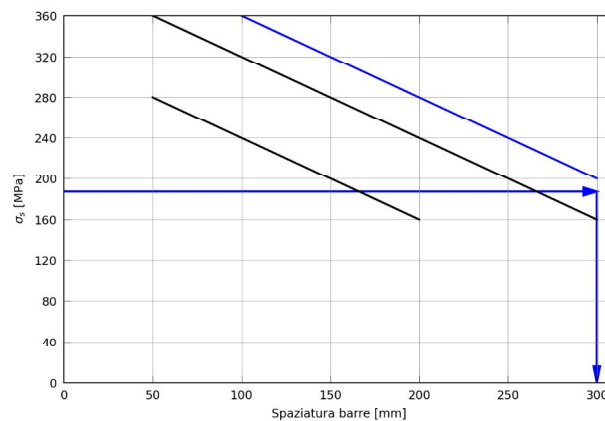
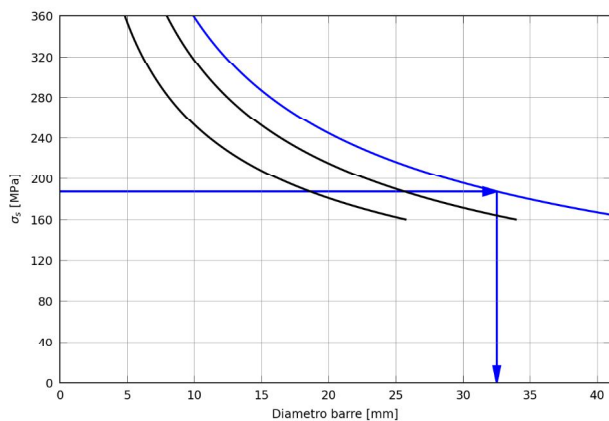


$\phi 18 < \phi 26$ e $164 \text{ mm} < 280 \text{ mm}$ ✓ VERIFICATO

TRAVE DI BORDO, CAMPATA A

$3\phi 18, \sigma_s = 187,1 \text{ MPa}$

spaziatura barre $i = (b - 2 \cdot (c + \phi_{st} + \phi_{long}/2)) / (n\phi - 1) = (300 - 2 \cdot (30 + 8 + 18/2)) / (3 - 1) = 103 \text{ mm}$

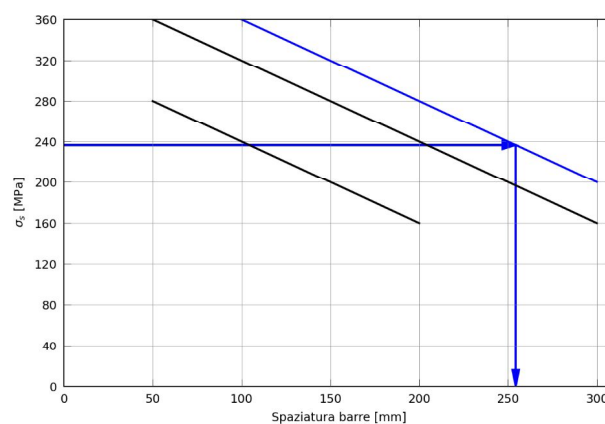
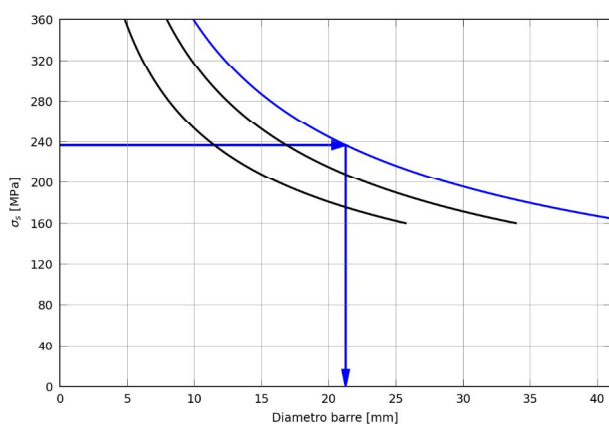


$\phi 18 < \phi 32$ e $103 \text{ mm} < 300 \text{ mm}$ ✓ VERIFICATO

TRAVE DI BORDO, APPOGGIO 2

$3\phi 18, \sigma_s = 236,5 \text{ MPa}$

spaziatura barre $i = (b - 2 \cdot (c + \phi_{st} + \phi_{long}/2)) / (n\phi - 1) = (300 - 2 \cdot (30 + 8 + 18/2)) / (3 - 1) = 103 \text{ mm}$



$\phi 18 < \phi 21$ e $103 \text{ mm} < 250 \text{ mm}$ ✓ VERIFICATO

Trave di spina TR_15-13

	Armatura tesa	σ_s [MPa]	ϕ [mm]	ϕ_{max} [mm]	$\phi \leq \phi_{max}$?	i [mm]	i_{max} [mm]	$\phi \leq \phi_{max}$?
CAMPATA A	8 ϕ 18	220,1	18	24	✓	94	270	✓
CAMPATA B	5 ϕ 18	148,0	18	40	✓	164	300	✓
APPOGGIO 1	5 ϕ 18	208,3	18	26	✓	164	280	✓
APPOGGIO 2	10 ϕ 18	225,6	18	23	✓	73	260	✓
APPOGGIO 3	9 ϕ 18	169,8	18	38	✓	82	300	✓

Trave di bordo TR_23-20

CAMPATA A	3 ϕ 18	187,1	18	32	✓	103	300	✓
CAMPATA B	2 ϕ 18	118,2	18	40	✓	206	300	✓
APPOGGIO 1	2 ϕ 18	166,7	18	38	✓	206	300	✓
APPOGGIO 2	3 ϕ 18	236,5	18	21	✓	103	250	✓
APPOGGIO 3	3 ϕ 18	161,3	18	38	✓	103	300	✓

VERIFICHE SLE – Deformazione (indiretta)

Per luci fino a 10m la verifica di deformazione può essere eseguita indirettamente controllando che il rapporto tra luce altezza (l/h) non superi un determinato limite.

Il secondo termine tra parentesi quadre può essere assunto unitario.

$$\frac{l}{h} \leq K \left[11 + \frac{0.0015 f_{ck}}{\rho + \rho'} \right] \cdot \left[\frac{500 A_{s,eff}}{f_{yk} A_{s,calc}} \right]^1$$

Sistema strutturale	K	Calcestruzzo molto sollecitato $\rho=1,5\%$	Calcestruzzo poco sollecitato $\rho=0,5\%$
Travi semplicemente appoggiate, piastre incernierate mono o bidirezionali	1,0	14	20
Campate terminali di travi continue o piastre continue monodirezionali o bidirezionali continue sul lato maggiore	1,3	18	26
Campate intermedie di travi continue o piastre continue mono o bidirezionali	1,5	20	30
Piastre non nervate sostenute da pilastri (snellezza relativa alla luce maggiore)	1,2	17	24

Trave di spina TR_15-13

	A_s [mm ²]	$\rho_s = \frac{A_s}{(bd)}$ [%]	$(l/h)_{\max}$	l [mm]	h [mm]	(l/h)	$(l/h) \leq (l/h)_{\max}$?
CAMPATA A	2035,8	1,12	18	4450	290	15,3	✓
CAMPATA B	1272,3	0,70	18	4200	290	14,5	✓

Trave di bordo TR_23-20

	A_s [mm ²]	$\rho_s = \frac{A_s}{(bd)}$ [%]	$(l/h)_{\max}$	l [mm]	h [mm]	(l/h)	$(l/h) \leq (l/h)_{\max}$?
CAMPATA A	763,4	1,01	18	4450	300	14,8	✓
CAMPATA B	508,9	0,67	18	4200	300	14,0	✓

VERIFICHE SLU - Taglio

Resistenza a “*taglio-trazione*” staffe

$$V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yd} \sin \alpha (ctg \alpha + ctg \vartheta)$$

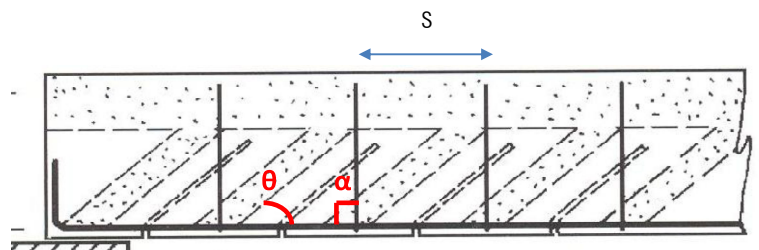
Resistenza a “*taglio-compressione*” cls

$$V_{Rcd} = b z f_{c2} \sin^2 \vartheta (ctg \alpha + ctg \vartheta)$$

α è l'inclinazione delle armature trasversali a taglio
 ϑ è l'inclinazione dei puntoni di calcestruzzo compressi
 $f_{c2} \sim 0,5 f_{cd}$
 $z = 0,9 d$

Ipotizzando staffe disposte perpendicolarmente
rispetto all'asse della trave ($\alpha = 90^\circ$),
ricordando che

$$\sin^2 \vartheta = \frac{1}{1 + ctg^2 \vartheta}$$



$$\Rightarrow V_{Rsd} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yd} ctg \vartheta$$

$$\Rightarrow V_{Rcd} = b z 0.5 f_{cd} \frac{ctg \vartheta}{1 + ctg^2 \vartheta}$$

Il taglio resistente sarà pari al minore tra VRsd e VRcd.

Quanto vale θ ?

Nella teoria del traliccio isostatico di Morsh, $\theta = 45^\circ$ (quindi $\text{ctg}\theta = 1$). Questo modello, però, conduce ad eccessivi dimensionamenti dell'armatura trasversale.

Il modello va quindi perfezionato aggiungendo il contributo della resistenza a trazione del calcestruzzo (cfr. resistenza a taglio di elementi privi di specifica armatura, come i solai). Nella teoria del traliccio con puntone a inclinazione variabile tale contributo viene preso in considerazione diminuendo l'inclinazione θ (cioè aumentando il valore di $\text{ctg}\theta$).

La normativa vigente, tuttavia impedisce di utilizzare valori di θ inferiori a 21.8° (cioè valori di $\text{ctg}\theta$ superiori a 2,5).

Pertanto $1 \leq \text{ctg}\theta \leq 2,5$ cioè $21,8^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$

Un criterio che si può adottare per determinare il valore di θ con cui calcolare i tagli resistenti, è quello di uguagliare le due equazioni di V_{Rsd} e V_{Rcd} : si ottiene in questo modo l'inclinazione θ_{eq} delle bielle di calcestruzzo cui corrisponde il cedimento simultaneo delle bielle di calcestruzzo e delle staffe.

Questo criterio permette di massimizzare il taglio resistente della trave.

$$\text{ctg}\theta_{eq} = \sqrt{\frac{s \cdot b \cdot 0.5 f_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd}} - 1}$$

N.B. Se trovo $\text{ctg}\theta_{eq} > 2,5$, allora prenderò $\text{ctg}\theta = 2,5$

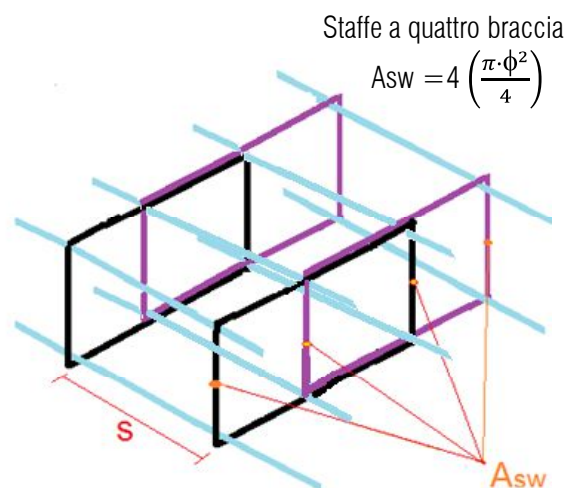
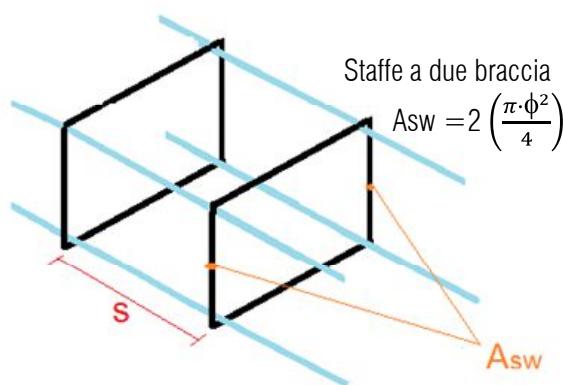
Se trovo $1 < \text{ctg}\theta_{eq} < 2,5$, allora prenderò $\text{ctg}\theta = \text{ctg}\theta_{eq}$

Se trovo $\text{ctg}\theta_{eq} < 1$, allora prenderò $\text{ctg}\theta = 1$



N.B. A_{sw} è l'area dell'armatura trasversale di staffe

s è il passo delle staffe, b è la larghezza della trave



LIMITAZIONI NORMATIVE:

- 1) $s < 500\text{mm}$ (cioè almeno tre staffe al metro)
- 2) $s < 0.8 d$ (d altezza utile della sezione)
- 3) $A_{sw}/s > 1,5 b \text{ mm}^2/\text{m}$ (b larghezza della sezione)

Oss. Solitamente, il passo delle staffe viene arrotondato per difetto ai 5 cm



Trave di spina TR_15-13 – ipotizzo staffe a 4 braccia $\phi 8$ ($A_{sw} = 201,1 \text{ mm}^2$)

Predimensiono l'armatura trasversale minima sulla base delle limitazioni normative: il passo s deve essere minore di 500mm (1) e di $0,8 \cdot 243 = 194,4 \text{ mm}$ (2), quindi scelgo $s = 150 \text{ mm}$. Verifico che $A_{sw}/s = 201,1 \text{ mm}^2/0,15 \text{ m} = 1340,4 \text{ mm}^2/\text{m} > 1,5 \cdot 750 = 1125 \text{ mm}^2/\text{m}$ (3).

Se con questi parametri la verifica a taglio non risulta verificata in uno o più punti della trave, in quella zona rifarò la verifica riducendo il passo di 5 cm

	Staffe	A_{sw} [mm ²]	s [mm]	$ctg \vartheta_{eq}$	$ctg \vartheta$	V_{Rsd} [kN]	V_{Rcd} [kN]	$V_{Rd} =$ $\min(V_{Rsd}; V_{Rcd})$ [kN]	V_{Sd} [kN]	$V_{Rd} \geq V_{Sd}$?
APPOGGIO 1	$\phi 8$ a 4 braccia	201,1	150	3,02 > 2,5	2,5	286,6	400,7	286,6	148,6	✓
APPOGGIO 2a	$\phi 8$ a 4 braccia	201,1	150	3,02 > 2,5	2,5	286,6	400,7	286,6	217,9	✓
APPOGGIO 2b	$\phi 8$ a 4 braccia	201,1	150	3,02 > 2,5	2,5	286,6	400,7	286,6	187,3	✓
APPOGGIO 3	$\phi 8$ a 4 braccia	201,1	150	3,02 > 2,5	2,5	286,6	400,7	286,6	174,9	✓

Trave di bordo TR_23-20 – ipotizzo staffe a 2 braccia $\phi 8$ ($A_{sw} = 100,5 \text{ mm}^2$)

Predimensiono l'armatura trasversale minima sulla base delle limitazioni normative: il passo s deve essere minore di 500mm (1) e di $0,8 \cdot 253 = 202,4 \text{ mm}$ (2), quindi scelgo $s = 200 \text{ mm}$. Verifico che $A_{sw}/s = 100,5 \text{ mm}^2/0,20 \text{ m} = 502,7 \text{ mm}^2/\text{m} > 1,5 \cdot 300 = 450 \text{ mm}^2/\text{m}$ (3).

Se con questi parametri la verifica a taglio non risulta verificata in uno o più punti della trave, in quella zona rifarò la verifica riducendo il passo di 5 cm

	Staffe	A_{sw} [mm ²]	s [mm]	$ctg \vartheta_{eq}$	$ctg \vartheta$	V_{Rsd} [kN]	V_{Rcd} [kN]	$V_{Rd} =$ $\min(V_{Rsd}; V_{Rcd})$ [kN]	V_{Sd} [kN]	$V_{Rd} \geq V_{Sd}$?
APPOGGIO 1	$\phi 8$ a 2 braccia	100,5	200	3,13 > 2,5	2,5	111,9	166,9	111,9	49,7	✓
APPOGGIO 2a	$\phi 8$ a 2 braccia	100,5	200	3,13 > 2,5	2,5	111,9	166,9	111,9	72,9	✓
APPOGGIO 2b	$\phi 8$ a 2 braccia	100,5	200	3,13 > 2,5	2,5	111,9	166,9	111,9	62,7	✓
APPOGGIO 3	$\phi 8$ a 2 braccia	100,5	200	3,13 > 2,5	2,5	111,9	166,9	111,9	58,5	✓

POSIZIONAMENTO DELL'ARMATURA LONGITUDINALE – Trave di spina

$$M_{Rd(10\phi 18)} = -217,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(9\phi 18)} = -195,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

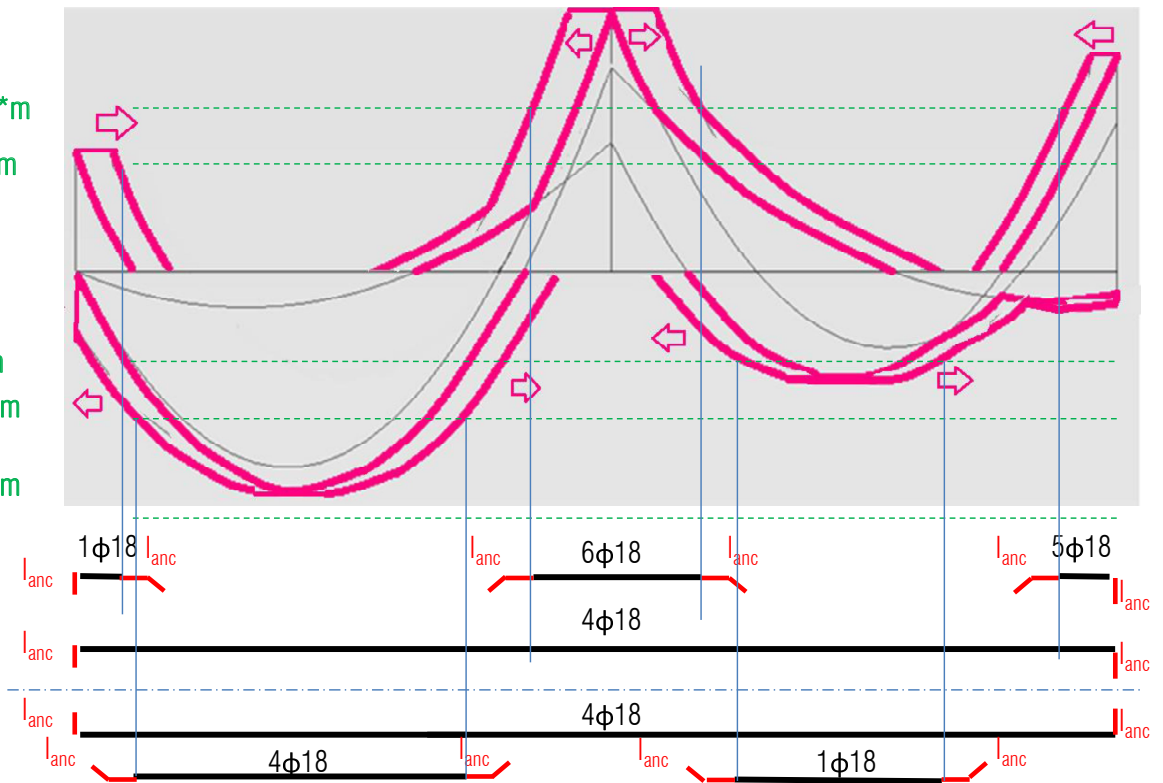
$$M_{Rd(5\phi 18)} = -108,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(4\phi 18)} = -87,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(4\phi 18)} = 87,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(5\phi 18)} = 108,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(8\phi 18)} = 174,1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



POSIZIONAMENTO DELL'ARMATURA LONGITUDINALE – Trave di spina

$$M_{Rd(10\phi 18)} = -217,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(9\phi 18)} = -195,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

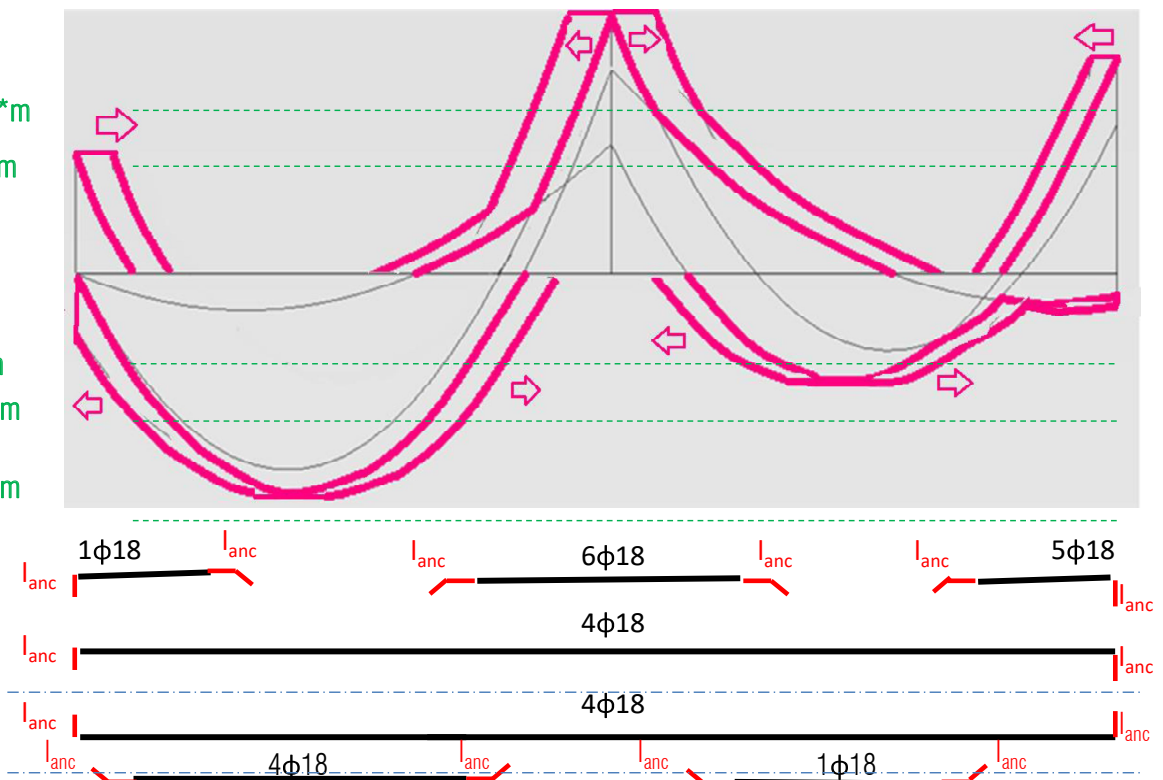
$$M_{Rd(5\phi 18)} = -108,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(4\phi 18)} = -87,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(4\phi 18)} = 87,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(5\phi 18)} = 108,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(8\phi 18)} = 174,1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



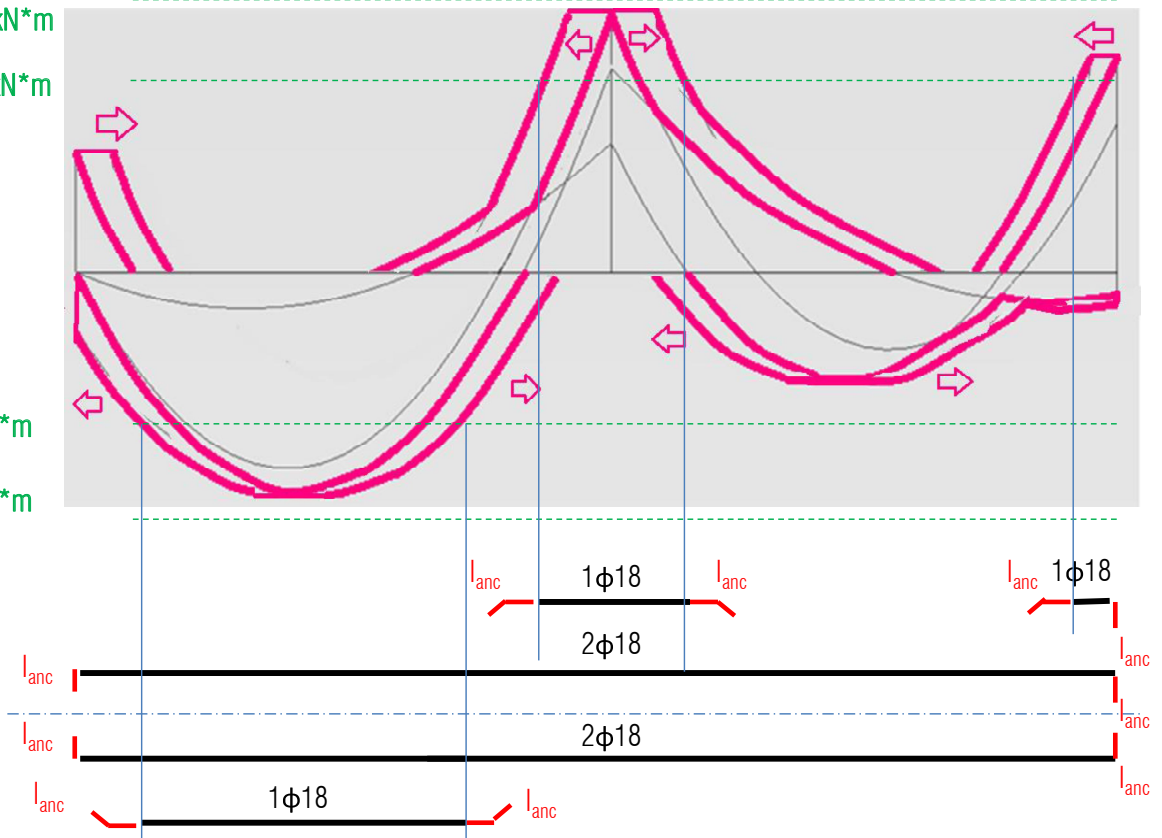
POSIZIONAMENTO DELL'ARMATURA LONGITUDINALE – Trave di bordo

$$M_{Rd(3\phi 18)} = -68,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(2\phi 18)} = -45,3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(2\phi 18)} = 45,3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(3\phi 18)} = 68,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



POSIZIONAMENTO DELL'ARMATURA LONGITUDINALE – Trave di bordo

$$M_{Rd(3\phi 18)} = -68,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(2\phi 18)} = -45,3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(2\phi 18)} = 45,3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Rd(3\phi 18)} = 68,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

