Geometria 2 2025/26
Foglio di esercizi 6

Prof. Valentina Beorchia

24 aprile 2026

1. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ si trovi un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche della retta passante per i punti $(1 : -2 : 3)$ e $(0 : 3 : -4)$.

2. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ si determinino un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche del piano L passante per i punti $(1 : 1 : 0 : 2)$, $(1 : 0 : 2 : 0)$ e $(0 : 0 : 3 : 1)$.

   Si consideri il piano T di equazione $x_0 - 2x_1 + 3x_3 = 0$ e si trovi la sua intersezione con L.

3. Rispetto al sistema di riferimento proiettivo canonico su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, si considerino i punti

   $$P_0 = (1 : 3),\ P_1 = (2 : -1),\ U = (5 : i).$$

   Si determinino le coordinate omogenee del punto $(1 : 1)$ rispetto al sistema di riferimento proiettivo nel quale P_0 e P_1 sono i punti fondamentali e U il punto unità.

4. Si considerino i punti $A = (1 : 1 : -1 : 0)$ e $B = (1 : 0 : 2 : 0)$ di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

   Si scrivano delle equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per A e B e l'equazione del fascio di piani di sostegno r.

5. Sia V_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

   $$v_1 = {}^t(1, 0, 3, 2), \quad v_2 = {}^t(3, 0, -1, 0).$$

   Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino i sottospazi proiettivi

   $$S_1 = \mathbb{P}(V_1), \quad S_2 :\ x_0 - 2x_1 + x_3 = 2x_0 + 2x_3 + ax_1 = 0$$

   dove a è un parametro reale.

   Si dica, al variare di a, quali sono le dimensioni di $S_1, S_2, S_1 \cap S_2$ e di $L(S_1 \cup S_2)$.

6. Si scriva l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di rette di centro $(2 : i : 1) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

   Si determini la retta $r \in \mathcal{F}$ che passa per il punto $(1 : 1 : 1)$.

7. Si determini la chiusura proiettiva della retta $t \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ di equazione

$$3ix - 2y - i + 1 = 0$$

   e si determinino le coordinate omogenee del suo punto improprio.

8. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ si consideri il piano L passante per i punti $(1 : -1 : 0 : 0)$, $(1 : 1 : 1 : 0)$ e $(2 : 1 : 0 : -2)$.

   Si determini l'equazione di L e l'equazione del piano affine $j_0^{-1}(L \cap U_0)$, dove

$$j_0 : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}, \quad j_0(x, y, z) = (1 : x : y : z),$$

   e $U_0 = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \mid x_0 \neq 0\}$.