Lezione 14 aprile 2026

martedì 14 aprile 2026 11:27

GEOMETRIA PROIETTIVA:

Nel piano $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:

Idea: vorrei aggiungere dei punti

che rappresentino dei punti di "intersezione

all'infinito" di rette parallele, in modo

da formalizzare in modo matematico

le nozioni della PROSPETTIVA.

Cons. 2 rette parallele :

r: $ax + by + c = 0$ $\qquad W_r : ax+by=0$

s: $ax + by + c' = 0$ $\qquad W_s : ax+by=0$

$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\right)$

Voglio in qualche modo introdurre le DIREZIONI

ovvero VETTORI DI DIREZIONE come

nuovi punti

Idea: aggiungo una indeterminata x_0 :

e cons. $\quad ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0 \quad \textcircled{*}$

$x = x_1$

$y = x_2$

$ax_1 + bx_2 + c'x_0 = 0 \quad \textcircled{**}$

Considero le terne (x_0, x_1, x_2) che soddisf.

$\textcircled{*}$ e $\textcircled{**}$:

- se $x_0 \neq 0$, $\textcircled{*}$ $a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c = 0$

  $\iff \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \in r$

  $\textcircled{**}$ $a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c' = 0$

  $\iff \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \in s$

  se $x_0 = 0$: $(0, x_1, x_2)$ soddisfa $\textcircled{*}$ e $\textcircled{**}$

  $ax_1 + bx_2 = 0 \iff \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in W_r$

Quindi: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax+by+c'=0 \end{cases}$ non ha soluzioni

$c \neq c'$

invece: $\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_0=0 \\ ax_1+bx_2+c'x_0=0 \end{cases}$ ha soluzioni non nulle

tutte proporzionali $\begin{pmatrix}0\\-b\\a\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c' \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}-\text{I}]{} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & c'-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_0=0 \\ \underset{\neq 0}{(c'-c)}\,x_0=0 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow ax_1+bx_2=0\ ;\ a\cdot(-b)+b\cdot(a)=0 \\ \Rightarrow x_0=0 \end{matrix}$$

$\Downarrow$

sp. W delle soluzioni è $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\-b\\a\end{pmatrix}\right)$

Vorrei anche che si fosse una biiezione tra le terne (x_0, x_1, x_2) che verificano

$\tilde{r}: \; a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0$ e hanno $x_0 \neq 0$

e le soluzioni di $a x + b y + c = 0 \; : r$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in r \xrightarrow{\text{INIETTIVA}} (1, \bar{x}, \bar{y}) \in \tilde{r}$$

$x_0 \neq 0$

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \qquad\qquad a\bar{x} + b\bar{y} + c \cdot 1 = 0$$

Viceversa

$$r \ni \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \xleftarrow{\text{NON È INIETTIVA}} (x_0, x_1, x_2) \in \tilde{r} \qquad x_0 \neq 0$$

$$a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0$$

$$\longleftarrow (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) \qquad \lambda \neq 0$$

$$\left(\frac{\lambda x_1}{\lambda x_0}, \frac{\lambda x_2}{\lambda x_1}\right) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_1}\right)$$

Idea: consideriamo le terne (x_0, x_1, x_2) a meno di un fattore di proporzionalità

Avremo biiezione $r \longleftrightarrow \tilde{r}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ a \end{pmatrix}$$

Formalmente: introduco la relazione di proporzionalità in $\mathbb{R}^3$; se la cons. su tutto $\mathbb{R}^3$, non è una relazione di equivalenza:

es.: $0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ dovrei avere $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\exists \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

Però: se escludo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e escludo $\lambda = 0$, la relazione di proporzionalità è di equivalenza!

Def.: $$\left. \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right/ \sim \; =: \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

PIANO
PROIETTIVO
REALE

dove $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $w \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ t.c. } w = \lambda v$

$= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Gli elementi sono classi di proporzionalità

$[(x_0, x_1, x_2)]$ con $(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$

$=: (x_0 : x_1 : x_2)$ TERNA OMOGENEA

Def.: Il luogo delle terne omogenee del tipo $(0 : x_1 : x_2)$ si chiama

RETTA ALL'INFINITO (o ORIZZONTE, o luogo dei PUNTI DI FUGA della PROSPETTIVA)

Teorema: La applicazione

$$j_0 : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

$$j_0(x, y) = (1 : x : y)$$

è iniettiva, e determina un'immersione di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Inoltre, $j_0(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}) = U_0 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} : x_0 \neq 0\}$ è il COMPLEMENTARE della retta all'infinito

Dim.: Mostro che

$$j_0' : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow U_0 \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

è biiettiva

Infatti: l'applicazione

$$f_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

$$f_0((x_0 : x_1 : x_2)) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

$x_0 \neq 0$

è inversa destra e sinistra di j_0.

$$j_0(f_0(x_0 : x_1 : x_2)) = j_0\left(\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)\right) = \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0}\right)$$

$$= (x_0 : x_1 : x_2)$$

$$f_0(j_0(x,y)) = f_0((1 : x : y)) = \left(\frac{x}{1}, \frac{y}{1}\right) = (x,y)$$

Generalizzazione a SV su campi $\mathbb{K}$ qualunque:

Def.: Sia V sv su $\mathbb{K}$, su $V \setminus \{0_V\}$ cons. la relaz. di equivalenza data dalla proporzionalità:

$$v, w \in V \setminus \{0_V\}, \quad v \sim w \iff \exists \lambda \in \underset{=\mathbb{K}\setminus\{0\}}{\mathbb{K}^*} : w = \lambda v$$

Esercizio: $\sim$ è REL. EQUIV.

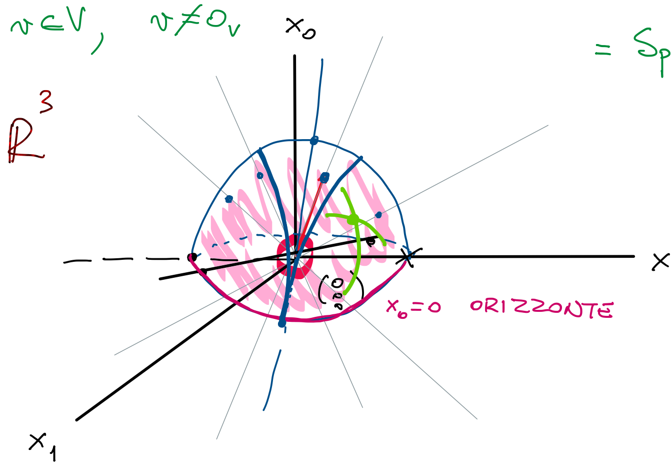
$$\Longrightarrow \quad {V \setminus \{0_V\}}/{\sim} =: \mathbb{P}(V)$$

SPAZIO PROIETTIVO su V

Se $\dim V = n < +\infty$, poniamo

$$\boxed{\dim \mathbb{P}(V) := n - 1}$$

OSS.: Le classi di equivalenza $[v] = \{w \in V : w = \lambda v, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$
$v \in V$, $v \neq 0_V$ $\qquad = \text{Span}(v) \setminus \{0_V\}$



Pb.: Come posso rappresentare $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$?

Idea: cons. una mezza sfera centrata nell'origine, ad es. di raggio 1