Lezione 15 aprile 2026

mercoledì 15 aprile 2026 11:18

V sv su $\mathbb{K}$, $V \neq \{0_V\}$

$$\mathbb{P}(V) := V \setminus \{0_V\} / \sim$$

$\sim$ rel. di proporzionalità

$\dim \mathbb{P}(V) := \dim V - 1$

$$\boxed{\text{Per convenzione } \dim \emptyset := -1}$$

Def.: $\dim \mathbb{P}(V) = 0$ se $\mathbb{P}(V)$ è un punto

$\dim \mathbb{P}(V) = 1$: RETTA PROIETTIVA

$\dim \mathbb{P}(V) = 2$ PIANO PROIETTIVO

Def.: $V = \mathbb{K}^n$, $\mathbb{P}(V) =: \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$
SPAZIO PROIETTIVO STANDARD

Visto $j_0 : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

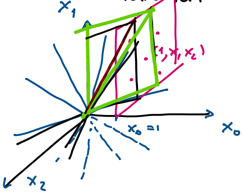
$$j_0(x, y) = (1 : x : y)$$

$$j_0(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}) = U_0 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \{(0 : x_1, x_2)\}$$

Posso fare un disegno:

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} / \sim \longleftarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

corrisponde all'insieme delle rette vettoriali di $\mathbb{R}^3$ $\left(\setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$



$x_0 = 1$ piano affine in $\mathbb{R}^3$

$x_0 = 0$ punti all'infinito

Def.: $j_0 : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$

$$j_0((x_1, \dots, x_n)) = (1 : x_1 : x_2 : \dots \; x_n)$$
$$= \left[\begin{pmatrix}1\\x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right]$$
$$\in \mathbb{K}^{n+1}$$

è iniettiva, e la sua immagine è

$$U_0 = j_0(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \{(0 : x_1 : \dots : x_n)\}$$

$f_0 : U_0 \to \mathbb{A}^n_K$

$$(x_0 : \dots : x_n) \longrightarrow \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$

$x_0 \neq 0$

Esercizio: $j_0 \circ f_0 : U_0 \longrightarrow U_0$

$j_0 \circ f_0 = Id_{U_0}$, $\quad f_0 \circ j_0 : \mathbb{A}^n_K \to \mathbb{A}^n_K$

$f_0 \circ j_0 = Id_{\mathbb{A}^n_K}$

Vogliamo ora associare "coordinate omogenee" a $P \in \mathbb{P}(V)$, con V sv su K arbitrario.

Def.: Un RIFERIMENTO PROIETTIVO su $\mathbb{P}(V)$ è una scelta di una base $\mathcal{B} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ di V e dei relativi punti

$$P_0 := [v_0], \quad P_1 := [v_1], \quad \dots, \quad P_n := [v_n].$$

Dato $v \in V \setminus \{0_V\}$, se

$$v = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

cioè $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di v nella $\mathcal{B}$

allora chiamiamo $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$

COORDINATE OMOGENEE di $P = [v]$

OSS.: le coordinate omogenee sono def. a meno di un fattore di proporzionalità:

$P = [v] = [\lambda v]$, $\quad v = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n$

$\lambda \in K^*$ $\quad \lambda v = \lambda a_0 v_0 + \dots + \lambda a_n v_n$

$$\Rightarrow (a_0 : \dots : a_n) = (\lambda a_0 : \dots : \lambda a_n)$$

Vogliamo vedere se posso parlare di LUOGHI DI ZERI di equazioni in $\mathbb{P}(V)$.

Esempio: Se $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$ è un polinomio

Quando $P(x_0, \dots, x_n) = 0$ è ben definito in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$?

Ad esempio, se $P(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è OMOGENEO

es: grado $P = 1$

$$P = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

grado $P = 2$, P è OMOGENEO se è somma di monomi di grado 2 (mancano i termini di grado 1 e di grado 0)

Def.: $P(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è OMOGENEO di grado d se è somma di monomi di grado d (mancano i termini di grado $\leq d-1$)

Supp. $P = a_0 x_0 + \dots + a_n x_n$ $\quad$ gr $P = 1$

e Supp. $P(\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_n) = 0$

$$= a_0 \bar{y}_0 + \dots + a_n \bar{y}_n$$

$\lambda \neq 0$

$$P(\lambda \bar{y}_0, \dots, \lambda \bar{y}_n) = a_0 \lambda \bar{y}_0 + \dots + a_n \lambda \bar{y}_n = \lambda \underbrace{(a_0 \bar{y} + \dots + a_n \bar{y}_n)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ il luogo dei punti $Q = (\bar{y}_0 : \dots : \bar{y}_n)$

t.c. $P(\bar y_0,\dots,\bar y_n)=0$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$

è ben definito (non dipende dalla scelta delle coordinate omogenee)

Sia $P(x_0,x_1,x_2)$ omogeneo di grado 2

es. $P(x_0,x_1,x_2)=3x_0^2-4x_1x_2+6x_1^2-8x_0x_2$

$P(0,0,1)=0 \quad = P(0,0,\lambda) \quad \forall\lambda\neq 0$

se $(\bar y_0:\bar y_1:\bar y_2)$ t.c.

$$P(\bar y_0,\bar y_1,\bar y_2)=0$$

$$P(\lambda\bar y_0,\lambda\bar y_1,\lambda\bar y_2)=3\lambda^2\bar y_0^2-4\lambda^2\bar y_1\bar y_2+6\lambda^2\bar y_1^2-8\lambda^2\bar y_0\bar y_2$$

$$\overset{!}{=}\lambda^2(\underbrace{3\bar y_0^2-4\bar y_1\bar y_2+6\bar y_1^2-8y_0y_2}_{=0})$$

$$\overset{!}{=}0$$

PROP.: $P(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$ è omogeneo di grado d $\Longleftrightarrow$

$\forall\lambda\in\mathbb{K}^*$ si ha

$$P(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n)=\lambda^d\cdot P(x_0,\dots,x_n)$$

* * *

SOTTOSPAZI PROIETTIVI
SSP

Def.: Dato V SV su $\mathbb{K}$, cons.

$\mathbb{P}(V)$

Un SSP di $\mathbb{P}(V)$ è un sottoinsieme del tipo $\mathbb{P}(W)$ con $W\subseteq V$ SSV.

Inoltre posso: se cons.

$$\pi : V \setminus \{0_V\} \longrightarrow V \setminus \{0_V\} / \sim$$

SURIEZ. CANONICA

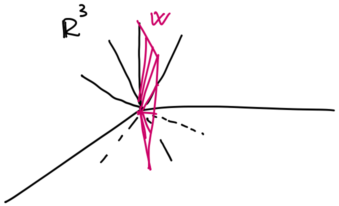
$$\pi(v) := [v]$$

$$\overset{\cup|}{W \setminus \{0_V\}}$$

$$\pi(W \setminus \{0_V\}) \subseteq V \setminus \{0_V\} / \sim \; = \mathbb{P}(V)$$

$$= \mathbb{P}(W)$$

Def.: $\dim \mathbb{P}(W) := \dim W - 1$



OSS.: Se $W \subseteq V$ è ssv di equazioni cartesiane (in V fissata $\mathcal{B}$ base)

$$A \cdot x = 0$$

$$\begin{cases} a_{00} x_0 + \cdots + a_{0n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k0} x_0 + \cdots + a_{kn} x_n = 0 \end{cases} \qquad ⊛$$

$\Rightarrow$ tutti e soli i punti di $\mathbb{P}(W)$ sono quelli di coordinate omogenee $(y_0 : \cdots : y_n)$ che soddisfano ⊛

RICORDO: se $W \subseteq V$ ssv di $\dim W = m+1$, $\dim V = n+1$

$\rightarrow$ è possibile esprimere W con

$\operatorname{codim}_V W = \dim V - \dim W = n+1-(m+1) = n-m$ equazioni cartesiane

$\Longrightarrow$ per costruzione

$\mathbb{P}(W)$ si può esprimere con $n-m$ equazioni

oss. $n-m = \dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W) = \operatorname{codim}_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}(W)$

Esempi in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$

Cons. 2. piani paralleli in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

$$j_0 : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$$

$$j_0(x,y,z) = (1:x:y:z)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^4 \setminus \{0_{\mathbb{R}^4}\} \arrow[d] \\ j_0 : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \\ (x,y,z) \arrow[r] & (1:x:y:z) \end{tikzcd}$$

$H_1, H_2 \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$: $2x - y + z = 1$ $\quad H_1$

$2x - y + z = 4$ $\quad H_2$

$$j_0(H_1) = \{(1:\bar{x}:\bar{y}:\bar{z}) : \underset{2\bar{x} - \bar{y} + \bar{z} - 1 = 0}{2\bar{x} - \bar{y} + \bar{z} = 1}\} \subseteq U_0$$

AFFERMO che $j_0(H_1) = \underset{\substack{\shortparallel \\ \{x_0 \neq 0\}}}{U_0} \cap \underbrace{\{(x_0:x_1:x_2:x_3) : 2x_1 - x_2 + x_3 - x_0 = 0\}}_{L}$

sì : $j_0(H_1) \subseteq U_0 \cap L$ FACILE

$j_0(H_1) \supseteq U_0 \cap L$

infatti: $(\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3) \in L \cap U_0$

$$\left(\begin{array}{l} \bar{x}_0 \neq 0 \qquad\qquad \cdot \frac{1}{\bar{x}_0} \\ = \left(1 : \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} : \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0} : \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_0}\right) = j_0\left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}, \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0}, \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_0}\right) \end{array}\right.$$

$$\rightarrow 2 \cdot \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0} + \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_0} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}, \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0}, \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_0}\right) \in H_1$$

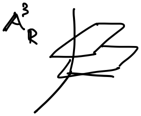
Analogamente:

$j_0(H_2) = U_0 \cap M$

M di eq. $2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_0 = 0$

$H_1 \cap H_2 = \emptyset$

Studio $L \cap M$



$\mathbb{P}^3$
U_0

$$\begin{array}{l} L \\ M \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_0 = 0 & W_1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_0 = 0 & W_2 \end{array} \right.$$

$L = \mathbb{P}(W_1)$, $W_1 \subseteq \mathbb{R}^4$

$M = \mathbb{P}(W_2)$ $W_2 \subseteq \mathbb{R}^4$

$$\dim W_1 \cap W_2 = 4 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$\overset{\dim}{\Rightarrow} L \cap M = 1$ è una RETTA PROIETTIVA