Lezione 21 aprile 2026

martedì 21 aprile 2026 11:18

Visto: def. $\mathbb{P}(V) = {V \setminus \{0_V\}} \big/ {\sim}$

SSP di $\mathbb{P}(V)$: dato $W \subseteq V$ SSV

in part. W è anche SV; cons.

$\mathbb{P}(W)$

Visto che ogni SSP si può assegn. con eq. cartesiane omogenee :

se W: è l'insieme delle soluz.

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + \dots + a_{0n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{k0}x_0 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

sono anche eq. per $\mathbb{P}(W)$.

~ ~ ~

Vogliamo ora dare un criterio affinché

$\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)$ sia $\neq \emptyset$

Lemma: Se $W_1, W_2 \subseteq V$ SSV

allora $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \begin{cases} \emptyset \\ \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \end{cases}$

Dim.: Supp. $\cap \neq \emptyset$

$$\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \{ [v] : v \neq 0_V,\ [v] \in \mathbb{P}(W_1) \text{ e } [v] \in \mathbb{P}(W_2) \}$$

$\subseteq \mathbb{P}(V)$

$$= \{ [v] : v \neq 0_V,\ v \in W_1 \text{ e } v \in W_2 \}$$

$$= \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$$

OSS. : $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset$

$\iff W_1 \cap W_2$

In generale: $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$

$\Downarrow$

0_V

$$\dim W_1 \cap W_2 \geq 0 \begin{cases} = 0 : \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset \\ \geq 1 : \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset \end{cases}$$

$\geq 1 \Downarrow$

$\exists\, v \neq 0_V$

$v \in W_1 \cap W_2$

e $[v] \in \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)$

$\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset \Downarrow$

$\mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$

~ ~

Ricordo Formula di Grassmann:

Dati $W_1, W_2 \subseteq V$ SSV

Allora : $= \dim \mathbb{P}(W_1 + W_2) \cancel{+1} = \dim \mathbb{P}(W_1) \cancel{+1} + \dim \mathbb{P}(W_2) \cancel{+1} - (\dim \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \cancel{+1})$

$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$

ovvero: $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1+W_2)$

Passando al proiettivo, troviamo subito:

PROP.: Se $W_1 \cap W_2 \neq \{0_V\}$

$$\boxed{\dim \mathbb{P}(W_1+W_2) = \dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) - \dim \underline{\mathbb{P}(W_1 \cap W_2)}}$$

OVVERO: $\dim \mathbb{P}(W_1+W_2) = \dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) - \dim(\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2))$

OSS.: Se $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$

$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$

$\|$

$\dim \mathbb{P}(W_1+W_2) + \cancel{1} = \dim \mathbb{P}(W_1) + \cancel{1} + \dim \mathbb{P}(W_2) + 1$

Se pongo per convenzione

$\dim \emptyset = -1$,

la form. di Grassmann proiettiva ha senso anche quando $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\dim(\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)) = \dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) - \dim \mathbb{P}(W_1+W_2)}$$ anche quando $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset$

COROLLARIO: $\underset{= n+1}{\dim W_1 + W_2 \leq \dim V} \Rightarrow \dim \mathbb{P}(W_1+W_2) \leq \dim \mathbb{P}(V) = n$

$\Rightarrow \dim(\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)) \geq \underbrace{\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2)}_{\geq n} - n$

In particolare: $\boxed{\text{se } \dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) \geq n}$

$\Rightarrow \underset{= \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)}{\dim(\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2))} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset}$

In particolare: $n = 2$: $\mathbb{P}^2_K$

2 rette proiettive

$\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) = 1+1 \geq n=2$

$\Rightarrow$ 2 rette proiett. si intersecano sempre.

2 piani proiettivi in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$

$2+2 \geq 3$

1 piano proiettivo e 1 retta proiettiva in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$:

$2+1 \geq 3$ si intersecano sempre

2 rette proiettive in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$: non necessariamente

Def.: Sia $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme qualunque; l'insieme

$$L(X) := \bigcap_{\mathbb{P}(W) \supseteq X} \mathbb{P}(W)$$

si dice SSP generato da X.

Lemma: $\mathbb{P}(W_1+W_2) = L(\mathbb{P}(W_1) \cup \mathbb{P}(W_2))$

Esercizio: visto

$$j_0 : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

$$j_0(y_1,\dots,y_n) = (1:y_1:\dots:y_n)$$

se $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ SSA

pongo $X = j_0(S)$; cons. eq. cartesiane per S

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

e cons. $\overline{X}$

$\downarrow$

dato delle eq.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - b_1x_0 = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n - b_kx_0 = 0 \end{cases}$$

visto $\overline{X} \cap U_0 = j_0(S)$

$= \{(x_0 : \dots : x_n) : x_0 \neq 0\}$

Lemma: se $X = j_0(S)$

$\overline{X} = L(j_0(S))$

$\supseteq$ tranquillo

Def.: $\overline{X}$ dato dal SLO ottenuto omogeneizzando le eq. cartesiane di S si dice CHIUSURA PROIETTIVA di S.

Esempio : $r \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$, retta

$H \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ piano

$j_0 : \mathbb{A}^3_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$

$j_0(\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}) = U_0 = \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}} \setminus \{ \underbrace{x_0 = 0} \}$

PIANO PROIETT.
PIANO ALL'∞

$X = j_0(r)$; eq. per $\overline{X}$ e $\overline{Y}$

$Y = j_0(H)$

$r : \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = d \end{cases}$ $\qquad \overline{X} : \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - c x_0 = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 - d x_0 = 0 \end{cases}$

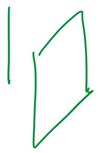
$H : \quad g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = h \qquad \overline{Y} \quad g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 - h x_0 = 0$

$$\overline{X} \cap \overline{Y} : \quad \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - c x_0 = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 - d x_0 = 0 \\ \\ g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 - h x_0 = 0 \end{cases}$$

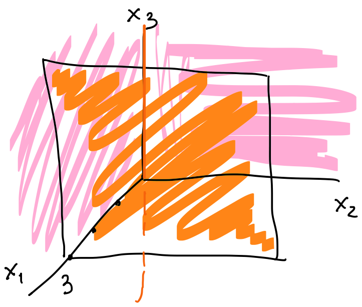
3 eq. omogenee in 4 indeterminate : x_0, x_1, x_2, x_3

dim spazio delle soluzioni $= 4 - \mathrm{rg}\, A \geq 4 - 3 = 1$

$\Rightarrow$ nel proiettivo dim ≥ 0.

Esempio :  $\subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

$r \parallel H$



$H : \begin{cases} x_1 = 3 \\ r : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$

$$\begin{cases} L = \overline{j_0(r)} : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ M = \overline{j_0(H)} : x_1 - 3x_0 = 0 \end{cases}$$

retta proiettiva in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

$L_\infty = L \cap \{x_0 = 0\}$ si chiama PUNTO ALL'∞ di L

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$ trovo il punto $(0:0:0:\lambda) = (0:0:0:1)$, $\lambda \neq 0$

$M \cap \{x_0 = 0\}$: $\begin{cases} x_1 - 3x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ RETTA ALL'∞ di M

$(0:0:\lambda:\mu)$

$L \cap M$: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_0 = 0 \end{cases}$: $(0:0:0:\lambda) = (0:\underbrace{0:0:1}_{})$, $\lambda \neq 0$

$$L \cap M = \{L_\infty\}$$

Infine: L_∞ codifica la direzione di r

r: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ eq. cartesiane

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$ vettore direzione: $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

In generale:

LEMMA: Se $r \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ è una retta con vettore di direzione $v = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ se $L = \overline{j_0(r)}$, $L_\infty = (0:l_1:l_2:l_3)$

Dim.: r: $\begin{cases} x_1 = q_1 + l_1 t \\ x_2 = q_2 + l_2 t \\ x_3 = q_3 + l_3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 - q_1 = l_1 t \\ x_2 - q_2 = l_2 t \\ x_3 - q_3 = l_3 t \end{cases}$

eq. cart.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} l_1 & x_1 - q_1 \\ l_2 & x_2 - q_2 \\ l_3 & x_3 - q_3 \end{pmatrix} = 1$$

Si verifica: omog. minori 2x2 $\Longleftrightarrow$ cart. minori 2x2

della

$$\begin{pmatrix} l_1 & x_1 - q_1 x_0 \\ l_2 & x_2 - q_2 x_0 \\ l_3 & x_3 - q_3 x_0 \end{pmatrix}$$

infine: interseco con $x_0 = 0$

sono i minori 2x2: $$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} l_1 & x_1 \\ l_2 & x_2 \\ l_3 & x_3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Longrightarrow L_\infty = (0 : l_1 : l_2 : l_3)$$