# Lezione 22 aprile 2026

mercoledì 22 aprile 2026 11:12

Oss.: $\mathbb{A}^3_K \hookrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ , $r \subseteq \mathbb{A}^3_K$ retta

$L = \overline{j_0(r)}$ il punto improprio

$(\cap \{x_0 = 0\})$ è $(0 : l_1 : l_2 : l_3)$

dove $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = v$ vett. di direz.

**Più in generale:** $M \subseteq \mathbb{A}^n_K$ SSA

$\overline{j_0(M)} = S \subseteq \mathbb{P}^n_K$ SSP ,

di eq.

$$M : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 \overset{\substack{x_0 = 0 \\ \downarrow}}{x_0} = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n - b_k x_0 = 0 \end{cases}$$

$S \cap \{x_0 = 0\} = S_\infty$ : è un particolare SSP

punti impropri

$$S_\infty \subseteq \mathbb{P}^n_K : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

eq. in $\mathbb{P}^n_K$ : rappresentano i punti all'$\infty$ di $S$

in $K^n$ : $(*)$ rapp. le eq. della giacitura $W_M$ di $M$

$$\Rightarrow \boxed{S_\infty = \mathbb{P}(W_M)}$$

Abbiamo quindi il seguente risultato:

**Prop.:** Dato un SSA $M \subseteq \mathbb{A}^n_K$, i punti all'$\infty$ della sua chiusura proiettiva $S = \overline{j_0(M)}$ sono dati dal SSP $S_\infty = \mathbb{P}(W_M)$, con $W_M$ giacitura di $M$.

## EQUAZIONI PARAMETRICHE:

per SSP

Sia $S \subseteq \mathbb{P}^n_K$ (opp. $\mathbb{P}(V)$ in cui abbiamo fissato SIST. RIF. PROIETTIVO, cioè una base di $V$: $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$)

$S = \mathbb{P}(W)$, $W \subseteq V$ SSV

Se fisso una base $\{w_1, \dots, w_k\}$ di $W$

$\forall\, w \in W$, $w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k$

$\Rightarrow [w] = [\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k] \in \mathbb{P}^n_K$

$\Rightarrow$ il generico punto $[w]$ di $\mathbb{P}(W) = S$ ha coordinate

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (\lambda_1 w_{10} + \dots + \lambda_k w_{k0} : \dots : \lambda_1 w_{1n} + \dots + \lambda_k w_{kn})$$

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k = (\lambda_1 w_{10} + \dots + \lambda_k w_{k0}) v_0 + \dots + (\lambda_1 w_{1n} + \dots + \lambda_k w_{kn}) v_n$$

$$w_1 = w_{10} v_0 + \dots + w_{1n} v_n$$
$$\vdots$$
$$w_k = w_{k0} v_0 + \dots + w_{kn} v_n$$

k parametri $\in K$ liberi

coord. di $w_k$

$$\begin{cases} \rho x_0 = \lambda_1 w_{10} + \dots + \lambda_k w_{k0} \\ \vdots \\ \rho x_n = \lambda_1 w_{1n} + \dots + \lambda_k w_{kn} \end{cases}$$

dove $\rho \in K^*$ è un ulteriore parametro libero

coord. di $w_1$

EQ PAR. OMOG. DI $S = \mathbb{P}(W)$

~ · ~ · ~ · ~

Posso anche riciclare la nozione di indipendenza lineare di vettori:

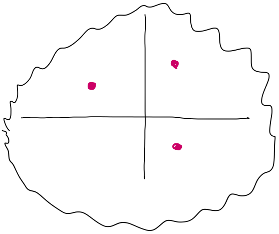
Def.: $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$, $\dim V = n+1$

$P_1 = [v_1], \dots, P_s = [v_s]$,

si dicono:

- se $s \leq n+1$, PROIETTIV. INDIP. se $v_1, \dots, v_s$ sono LIN. INDIP.
- se $s \geq n+2$, IN POSIZIONE GENERALE se $\forall$ sottoinsieme di $n+1$ elementi di $\{v_1, \dots, v_s\}$ è formato da $n+1$ vettori indipendenti.

Es.: $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \geq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ ; $x_0 = 0$ retta proiettiva



$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}}{\sim}$$

$P_1, P_2, P_3$ proi. indip.

$P_1 = [v_1]$, $P_2 = [v_2]$, $P_3 = [v_3]$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ LIN INDIP

$\Longleftrightarrow$ non sono complanari

$\Longleftrightarrow \dim \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = 3$

$\Longrightarrow \dim L([v_1], [v_2], [v_3]) = 3 - 1 = 2$

$L([v_1], [v_2], [v_3]) = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3))$

$\Longrightarrow P_1, P_2, P_3$ non giacciono su rette proiettive

**Def.:** Fisso rif. proi in $\mathbb{P}(V)$

$\{E_0 = [v_0], E_1 = [v_1], \dots, E_n = [v_n]\}$

e poniamo $U = [v_0 + \dots + v_n]$

$E_0, \dots, E_n$ PUNTI FONDAMENTALI

$U$ PUNTO UNITA'

In coordinate omogenee:

$E_0 = (1:0:\dots:0)$, $E_1 = (0:1:0:\dots:0)$

... $E_n = (0:0\dots:0:1)$

$U = (1:1\dots:1)$

**Lemma:** Fissato rif. proi. in $\mathbb{P}(V)$, gli $n+2$ punti $\{E_0, \dots, E_n, U\}$ sono in POSIZ. GENERALE.

Dim. Comunque scelgo $n+1$ di loro, sono PROI. INDIP.:

- $E_0, \dots, E_n$ ok : $v_0, \dots, v_n$ LIN INDIP
- $E_1, \dots, E_n, U$ : $v_1, \dots, v_n, v_0 + \dots + v_n$ LIN.
- $E_0, \dots, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{tolto}}}{\hat{E}_i}, \dots, E_n, U$

Prop.: Siano $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ punti di $\mathbb{P}(V)$. Allora $\exists!$ riferimento proi. t.c. $P_0, \dots, P_n$ siano i punti fondamentali e $P_{n+1}$ sia il punto unità.

Dim. cenno: $P_0 = [v_0]$

$$\vdots$$

$P_n = [v_n]$

$P_0, \dots, P_{n+1}$ in POS. GEN. $\rightarrow$ $P_0, \dots, P_n$ proi. ind. $\Rightarrow$ $v_0, \dots, v_n$ LIN INDIP

$P_{n+1} = [v_{n+1}]$, $v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$

Si può verificare che $\lambda_i \neq 0$

(altrimenti $P_0, \dots, P_n, P_{n+1}$ non in POS GEN.)

Cons. la base di $V$ data da

$\{\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n\}$ (esercizio: è una base!)

$E_0 = [\lambda_0 v_0] = [v_0] = P_0$

$$\vdots$$

$E_n = [\lambda_n v_n] = [v_n] = P_n$

$U = [\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n] = P_{n+1}$

* * *

# FASCI DI RETTE PROIETTIVE PIANE

**Def.:** Siano $L, R \subseteq \mathbb{P}^2_K$ due rette distinte

di eq. omogenee

$$L: \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 x_0 = 0$$

$$R: \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_0 x_0 = 0$$

Il FASCIO PROIETTIVO $\mathcal{F}$ generato da L e R è l'insieme di rette proiettive di equazioni:

$$\lambda \underbrace{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 x_0)}_{=: P_1(x_0, x_1, x_2)} + \mu \underbrace{(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_0 x_0)}_{Q_1(x_0, x_1, x_2)} = 0$$

al variare di $\lambda, \mu \in K$, non entrambi nulli; o MEGLIO: posso scegliere di variare

$$(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1_K = \frac{K^2 \setminus \{(0,0)\}}{\sim} \quad \text{RETTA PROIETTIVA}$$

infatti: se $(\lambda_1, \mu_1)$ e $(\lambda_2, \mu_2)$ sono coppie proporzionali, quindi $\exists\ \alpha \neq 0$

$$(\lambda_2, \mu_2) = (\alpha \lambda_1, \alpha \mu_1)$$

le eq. $\lambda_1 \cdot P_1(x_0, x_1, x_2) + \mu_1 Q_1(x_0, x_1, x_2) = 0$

$$\lambda_2 \cdot P_1(x_0, x_1, x_2) + \mu_2 Q_1(x_0, x_1, x_2) = 0$$

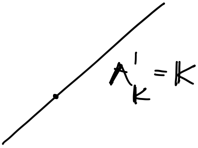
$$= \alpha \lambda_1 \cdot P_1(\cdot\cdot) + \alpha \mu_1 Q_1(\cdot\cdot\cdot)$$

$$= \alpha \left(\lambda_1 P_1(\cdot\cdot) + \mu_1 Q_1(\cdot\cdot)\right)$$

Sono diverse, MA rappresentano LA STESSA RETTA

PARENTESI SU $\mathbb{P}^1_K$ :

$$j_0 : \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$$



$$j_0(x) = (1:x) \in U_0 = \{(x_0:x_1) \ : x_0 \neq 0\}$$

$$\mathbb{P}^1 \setminus U_0 = \{x_0 = 0\} = \{(0:x_1) \ : \ x_1 \neq 0\}$$
$$= \{(0:1)\}$$

**PROP.:** Dato un fascio di rette proiettive $\mathcal{F}$, la funzione

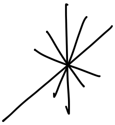
$$\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{P}^1$$
$$\Phi(L_{(\lambda:\mu)}) = (\lambda:\mu)$$

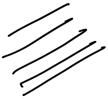
è biettiva.

Dim. esercizio

**Prop.:** Se $L, R \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ rette proiettive distinte, sappiamo che $L \cap R = \{P\}$.

Allora le rette di $\mathcal{F}$ generato da $L$ e $R$ sono tutte e sole le rette per $P$.



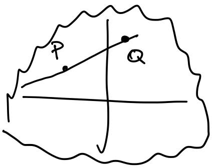


Dim. $\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_0x_0) + \mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_0x_0) = 0$

$(p_0:p_1:p_2)$ annulla

$\Rightarrow$ ogni retta del fascio passa per $P$

Sia ora M una retta qualunque passante per P



Su M fisso un ulteriore punto $Q \in M$, $Q \neq P$

$Q = (q_0 : q_1 : q_2)$

Cons. ora la retta di $\mathcal{F}$ passante per Q:

$$\lambda(\underbrace{a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_0 q_0}_{\neq 0}) + \mu(b_1 q_1 + b_2 q_2 + b_0 q_0) = 0$$

supp. $\neq 0$ opp. $\neq 0$

una coppia è data da $(-(b_1 q_1 + b_2 q_2 + b_0 q_0) : a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_0 q_0)$

$$= (\bar{\lambda} : \bar{\mu})$$

## FASCI PROIETTIVIZZATI:

Def.: In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ cons. un fascio di rette affini

$$\lambda(a_1 x + a_2 y + a_0) + \mu(b_1 x + b_2 y + b_0) = 0$$

$$\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$$

il fascio proiett. è quello di eq.:

$$\lambda(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 x_0) + \mu(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_0 x_0) = 0$$